

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2024

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Isian Singkat

1. Diketahui bahwa \overline{ab} dan \overline{cd} adalah dua bilangan yang hasil kalinya adalah 777. Jika $\overline{ab} < \overline{cd}$, maka nilai dari $a + b$ adalah...
2. Misalkan f dan g fungsi linier yang memenuhi persamaan $f(x + g(y)) = 7x + 2y + 11$ untuk setiap bilangan real x, y . Jika diketahui $g(7) = 3$, maka $g(-11 + f(4))$ adalah
Catatan: fungsi linier adalah fungsi berbentuk $h(x) = ax + b$ dengan a, b konstanta bilangan real.
3. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 15, AC = 13, BC = 4$. Diketahui bahwa terdapat sebuah segitiga sama sisi PQR dengan P, Q , dan R masing-masing terletak pada sisi BC, CA , dan AB sehingga PQ sejajar dengan AB . Nilai $\frac{PQ}{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat positif, d tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang bernilai lebih dari satu, dan $FPB(a, b, c) = 1$. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah...
4. Masing-masing pada petak pada papan berukuran 2023×3 akan diwarnai dengan salah satu dari warna hitam atau putih, sedemikian sehingga setiap sub-papan berukuran 2×2 , terdapat masing-masing sebanyak ganjil petak berwarna hitam dan ganjil petak berwarna putih. Misalkan banyaknya cara pewarnaan petak yang mungkin adalah A , sisa dari A ketika dibagi 1000 adalah...
5. Banyaknya bilangan asli a yang kurang dari 209 sehingga $FPB(a, 209) = 1$ dan $a^2 - 1$ bukan kelipatan dari 209 adalah...
6. Pada persegi $ABCD$ dengan panjang sisi $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, titik X terletak pada diagonal AC sehingga $AX > XC$. Garis bagi dalam sudut AXB memotong sisi AB pada titik U . Garis bagi dalam sudut CXD memotong sisi CD pada titik V . Jika $\angle UXV = 150^\circ$, maka nilai dari $[3 \times UV^2]$ adalah...
7. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$. Misalkan N adalah banyaknya pasangan terurut (A, B) dengan A, B himpunan bagian dari S sehingga $|A \cap B| \leq 2$. Nilai dari $\frac{N}{3^{16}}$ adalah...
Catatan: Notasi $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X .
8. Misalkan a, b, c merupakan bilangan-bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan;

$$|ax^2 + bx + c| \leq (18x + 5)^2$$

Untuk setiap bilangan real x . Nilai terkecil yang mungkin dari $a + 2b + 5c$ adalah...

B. Uraian

1. Untuk bilangan real $C \leq 2$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x, y dengan $xy = 1$, berlaku ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \frac{C}{x + y} \geq 1 + \frac{C}{2}$$

2. Diberikan sebuah papan $n \times n$ yang terbagi menjadi petak-petak berukuran 1×1 yang kesemuanya berwarna putih. Aqua memiliki beberapa buah petak dari papan ini dengan mewarnainya dengan warna hitam. Ruby kemudian melatakkan tepat satu buah domino berukuran 1×2 di papan, sehingga domino tersebut menutupi tepat dua buah petak di papan. Ruby dapat memutar domino tersebut menjadi domino 2×1 . Setelah Aqua mewarnai, ternyata ada tepat 2024 cara bagi Ruby untuk meletakkan sebuah domino di papan sehingga domino tersebut menutupi tepat 1 petak hitam dan 1 petak putih. Tentukan nilai n terkecil yang mungkin agar Aqua dan Ruby dapat melakukan hal ini.
3. Pada segitiga ABC , titik X, Y , dan Z masing-masing merupakan titik tengah dari BC, CA , dan AB berturut-turut. Garis sumbu AB memotong garis XY dan garis AC berturut-turut pada Z_1 dan Z_2 . Garis sumbu AC memotong garis XZ dan garis AB berturut-turut pada Y_1 dan Y_2 . Misalkan K adalah titik sehingga $KZ_1 = KZ_2$ dan $KY_1 = KY_2$. Buktikan bahwa $KB = KC$
4. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli $1 \leq a, b \leq 2027$ yang memenuhi

$$2027 \mid a^6 + b^5 + b^2$$

Catatan: untuk bilangan bulat a dan b , notasi $a \mid b$ berarti terdapat suatu bilangan bulat c sehingga $ac = b$.