

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2022

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Isian Singkat

1. Misalkan a, b, c adalah bilangan asli sedemikian sehingga $a + 2b + 3c = 73$. Nilai minimum dari $a^2 + b^2 + c^2$ adalah...
2. Diketahui bahwa $ABCD$ adalah trapesium sedemikian sehingga $AB \parallel CD$, dengan panjang $AB = 6$ dan $CD = 7$. Diketahui titik P dan Q pada AD dan BC berturut-turut sedemikian sehingga $PQ \parallel AB$. Jika keliling trapesium $ABQP$ sama dengan keliling $PQCD$, serta $AD + BC = 10$, panjang dari $2PQ$ adalah...
3. Sebuah segitiga sama sisi dengan panjang 21 dipartisi menjadi 21^2 segitiga sama sisi dengan panjang 1, dan sisi-sisi segitiga kecil sejajar dengan segitiga besar. Banyaknya jajargenjang tersusun atas segitiga sama sisi kecil adalah $21k$. Nilai $k = \dots$
4. Jumlah semua bilangan asli b sehingga terdapat bilangan asli a yang memenuhi $\sqrt{a + \frac{15}{b}} = a\sqrt{\frac{15}{a}}$ adalah...
5. Didefinisikan suatu barisan sebagai semua bilangan tujuh digit yang terdiri dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Suku ke-2024 dari barisan tersebut adalah...
6. Misalkan $P(x)$ adalah sebuah polinomial dengan koefisien bilangan bulat sedemikian sehingga $P(6)P(38)P(57) + 19$ habis dibagi 114. Jika $P(-13) = 479$, dan $P(0) \geq 0$, nilai minimum dari $P(0)$ adalah...
7. Banyaknya pasangan bilangan bulat (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan $m^n = 17^{324}$ adalah...
8. Misalkan ABC adalah segitiga dengan $AB = 16$, $AC = 23$, dan $\angle BAC = 30^\circ$. Luas persegi panjang terbesar sehingga salah satu sisinya berimpit dengan BC , dan dua titik sudut lainnya masing-masing pada AB dan AC adalah...
9. Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari $S = \{1, 2, \dots, 21\}$ yang hasil penjumlahan anggotanya habis dibagi 4 adalah $2^k - m$; dimana $k, m \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq m < 2022$. Nilai dari $10k + m$ adalah...
10. Definisikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_1 > 3$, serta untuk semua $n \geq 1$, berlaku:

$$2a_{n+1} = a_n(-1 + \sqrt{4a_n - 3})$$

Jika $|a_1 - a_{2022}| = 2023$, nilai dari

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{a_{i+1}^3}{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2} = \dots$$

B. Uraian

1. Misalkan A dan B himpunan dengan sifat bahwa terdapat 144 himpunan yang merupakan himpunan bagian dari A atau B . Tentukan banyaknya anggota $A \cup B$.
2. (a) Tentukan suatu bilangan asli n sehingga $n(n + 2022) + 2$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.
(b) Tentukan semua bilangan asli a sehingga untuk setiap bilangan asli n , bilangan $n(n + a) + 2$ tidak pernah merupakan suatu kuadrat sempurna.
3. Diketahui bahwa x, y adalah bilangan real yang memenuhi

$$5x^2 + 4xy + 11y^2 = 3$$

Tanpa menggunakan kalkulus (turunan/integral), tentukan nilai maksimum dari $xy - 2x + 5y$

4. Diberikan segitiga ABC dengan titik lingkaran luar O . Titik D merupakan refleksi titik A terhadap BC . Misalkan l adalah garis yang sejajar dengan BC dan melalui O . Garis melalui B sejajar CD dan l bertemu pada titik B_1 . CB_1 dan BD berpotongan pada titik B_2 . Garis melalui C sejajar BD dan l bertemu pada titik C_1 . BC_1 dan CD berpotongan pada titik C_2 . Buktikan bahwa $A_1B_2C_2D$ terletak pada satu lingkaran (siklis).
5. Pada papan tertulis mula-mula terdapat 22 angka $1, 2, 3, \dots, 21, 22$. Satu langkah adalah prosedur memilih dua angka a, b pada papan dengan $B \geq a + 2$, kemudian menghapus a dan b menggantikannya dengan $a + 1$ dan $b - 1$. Tentukan banyaknya langkah maksimum yang mungkin dapat dilakukan.