

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2019

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Dalam kantong terdapat 7 bola merah dan 8 bola putih. Andi mengambil dua bola sekaligus dari dalam kantong. Peluang terambilnya dua bola yang berwarna sama adalah...
2. Diberikan suatu segienam beraturan dengan panjang sisi 1 satuan. Luas segienam tersebut adalah...
3. Diketahui bahwa r, s , dan 1 adalah akar-akar persamaan kubik $x^3 - 2x + c = 0$. Nilai dari $(r - s)^2$ adalah...
4. Banyaknya pasangan bilangan asli (m, n) sehingga $FPB(m, n) = 2$ dan $KPK(m, n) = 1000$ adalah...
5. Suatu data dengan empat bilangan real $2n - 4, 2n - 6, n^2 - 8, 3n^2 - 6$ mempunyai rata-rata 0 dan median $\frac{9}{2}$. Bilangan terbesar dari data tersebut adalah...
6. Misalkan a, b, c, d adalah bilangan-bilangan bulat lebih besar dari 2019 yang merupakan empat suku berurutan dari barisan aritmatika dengan $a < b < c < d$. Jika a dan d merupakan kuadrat dari dua bilangan asli yang berurutan, maka nilai terkecil dari $c - b$ adalah...
7. Diberikan segitiga ABC , dengan $AB = 6, AC = 8$, dan $BC = 10$. Titik-titik D dan E terletak pada segmen garis BC , dengan $BD = 2$ dan $CE = 4$. Besar sudut DAE adalah...

8. Barisan bilangan real a_1, a_2, a_3, \dots memenuhi

$$\frac{na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n}{n^2} = 1$$

untuk setiap bilangan asli n . Nilai dari $a_1 a_2 a_3 \dots a_{2019}$ adalah...

9. Banyak cara memilih empat bilangan asli dari $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ dengan syarat selisih sebarang dua bilangan paling sedikit 3 adalah...

10. Pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi

$$m^2 n + m n^2 + m^2 + 2mn = 2018m + 2019n + 2019$$

ada sebanyak...

11. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ABC = 135^\circ$ dan $BC > AB$. Titik D terletak pada sisi BC sehingga $AB = CD$. Misalkan F titik pada perpanjangan sisi AB sehingga DF tegak lurus AB . Titik E terletak pada sinar DF sehingga $DE > DF$ dan $\angle ACE = 445^\circ$. Besar $\angle AEC$ adalah...
12. Himpunan S terdiri dari n bilangan bulat dengan sifat berikut: Untuk setiap tiga anggota berbeda dari S ada dua di antaranya yang hasil penjumlahannya merupakan anggota S . Nilai terbesar dari n adalah...
13. Nilai minimum dari $\frac{a^2+2b^2+\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$ dengan a, b bilangan real positif adalah...
14. Polinom $P(x)$ yang memenuhi persamaan $P(x^2) = x^{2019}(x+1)P(x)$ dengan $P(\frac{1}{2}) = -1$ adalah...
15. Pandang papan catur berukuran 19×19 petak persegi satuan. Dua petak dikatakan bertetangga jika keduanya memiliki satu sisi persekutuan. Pada mulanya, terdapat total k koin pada papan catur tersebut dimana setiap koin hanya termuat tepat satu pada petak dan setiap petak dapat memuat koin atau kosong. Pada setiap giliran, Anda harus memilih tepat satu petak yang memuat koin sebanyak minimal banyaknya tetangga petak tadi, kemudian Anda harus memberikan tepat satu koin pada masing-masing tetang petak yang terpilih tadi. Permainan berakhir jika Anda sudah tidak dapat memilih petak dengan kondisi yang dimaksudkan. Bilangan terkecil k sehingga permainan tidak pernah berakhir untuk sembarang pemilihan petak awal adalah...

B. Uraian

1. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 4 satuan dan P titik tengah sisi $EFGH$. Jika M adalah titik tengah PH , tentukan panjang segmen garis AM .
2. Cari semua bilangan real k sehingga sistem persamaan

$$a^2 + ab = kb^2b^2 + bc = kc^2c^2 + ca = ka^2$$

memiliki solusi bilangan real positif a, b, c

3. Suatu papan catur berukuran $m \times n$ masing-masing kotaknya diwarnai hitam atau putih sedemikian sehingga:
 - (a) Pada setiap baris banyaknya kotak hitam dan kotak putih sama banyak.
 - (b) Jika suatu baris berpotongan dengan suatu kolom di suatu kotak hitam, maka baris dan kolom tersebut mengandung kotak hitam yang sama banyak
 - (c) Jika suatu baris berpotongan dengan suatu kolom di suatu kotak putih, maka baris dan kolom tersebut mengandung kotak putih yang sama banyak

Tentukan semua nilai m dan n yang mungkin agar pewarnaan dengan sifat di atas dapat dilakukan.

4. Untuk bilangan real x , simbol $[x]$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil daripada x , dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x . Tentukan semua bilangan bulat tak negatif k sehingga dapat ditemukan bilangan real positif tak bulat x yang memenuhi sifat:

$$\lfloor x + k \rfloor^{\lfloor x + k \rfloor} = \lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}$$

5. Diberikan segitiga ABC , dengan $AC > BC$, dan lingkaran luarnya yang berpusat di O . Misalkan M adalah titik pada lingkaran luar segitiga ABC sehingga CM adalah garis bagi $\angle ACB$. Misalkan Γ adalah lingkaran berdiameter CM . Garis bagi BOC dan garis bagi AOC memotong Γ berturut-turut di P dan Q . Jika K adalah titik tengah CM , buktikan bahwa P, Q, O, K terletak pada satu lingkaran.