

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2017

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Isian Singkat

1. Dua bilangan real tidak nol a dan b memenuhi $ab = a - b$. Nilai $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ yang mungkin adalah...
2. Tokoh masyarakat di suatu RW, selain pak RW dan Bu RW, terdapat 5 orang wanita dan 6 orang pria. Kelurahan meminta 6 orang untuk mengikuti seminar di tingkat kota. Dipilih 6 orang sebagai delegasi RW, dengan komposisi 3 orang wanita dan 3 orang pria, yang salah satu di antaranya Pak RW. Banyaknya cara memilih delegasi tersebut adalah...
3. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 13$, $AC = 15$, dan panjang garis tinggi ke BC adalah 12. Jumlah semua panjang BC yang mungkin adalah...
4. Bilangan prima dua digit $p = \overline{ab}$ yang memenuhi \overline{ba} juga prima ada sebanyak...
5. Misalkan f fungsi real yang memenuhi $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + 2x + 3$. Jumlah semua nilai z yang memenuhi $f(3z) = 12$ adalah...
6. Ita memilih 5 bilangan di antara $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan mengatakan kepada Budi hasil kali dari kelima bilangan tersebut. Kemudian Ita bertanya apakah Budi mengetahui hasil penjumlahan kelima bilangan tersebut merupakan bilangan ganjil atau genap. Budi menjawab bahwa dia tidak bisa memastikannya. Nilai hasil kali lima bilangan yang dimiliki Ita adalah...
7. Misalkan $ABCD$ sebuah persegi dengan panjang sisi 2017. Titik E terletak pada segmen CD sehingga $CEFG$ merupakan persegi dengan panjang sisi 1702, dengan F dan G terletak di luar $ABCD$. Jika lingkaran luar segitiga ACF memotong BC lagi di titik H , maka panjang CH adalah...

8. Banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi persamaan

$$x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

9. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi persamaan

$$x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 1 = 6xy$$

Jika M dan m berturut-turut menyatakan nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari $x - y$, maka nilai dari $M - m$ adalah...

10. Diberikan 2017 lampu yang dilengkapi saklar untuk menyalakan dan mematikan lampu. Mula-mula semua lampu dalam keadaan padam. Pada setiap menit Ani harus menekan tepat 5 saklar. Setiap saklar ditekan lampu yang tadinya pada menjadi menyala dan yang tadinya menyala menjadi padam. Untuk menyalakan semua lampu, Ani paling sedikit membutuhkan... menit
11. Diberikan bilangan real positif k . Pada suatu segitiga ABC titik D, E , dan F berturut-turut terletak pada sisi BC, CA , dan AB sehingga $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = k$. Jika $[ABC]$ dan $[DEF]$ berturut-turut menyatakan laus segitiga ABC dan DEF , maka $\frac{[DEF]}{[ABC]}$
12. Untuk sebarang bilangan asli k , misalkan $I_k = 10 \cdots 064$ dengan 0 di antara 1 dan 6 sebanyak k . Jika $N(k)$ menyatakan banyaknya faktor 2 pada faktorisasi prima dari I_k , maka nilai maksimum untuk $N(k)$ adalah...
13. Jika x, y , dan z bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $x + \frac{1}{y} = 4, y + \frac{1}{z} = 1, z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$, maka nilai xyz adalah...
14. Sepuluh siswa mempunyai tinggi badan yang berbeda. Guru olahraga menginginkan mereka berbaris menyamping, dengan syarat tidak ada siswa diapit oleh dua siswa lain yang lebih tinggi dari dirinya. Banyaknya cara membentuk barisan seperti itu adalah...
15. Diberikan segitiga ABC dengan τ sebagai lingkaran luarnya. Tali busur AD adalah garis bagi dalam sudut BAC yang memotong BC di titik L . Tali busur DK tegak lurus pada AC dan memotong AC di titik M . Jika $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$, maka nilai dari $\frac{AM}{MC}$ adalah...
16. Bilangan asli empat digit n habis dibagi oleh 7. Bilangan asli k , yang diperoleh dengan menuliskan digit-digit n dari belakang ke depan, juga habis dibagi oleh 7. Selain itu, diketahui bahwa n dan k mempunyai sisa yang sama apabila dibagi oleh 37. Jika $k > n$, maka jumlah dari semua n yang memenuhi adalah...
17. Untuk sebarang bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x . Diketahui $\{a_i\}_{i \geq 1}$ barisan bilangan real dengan $a_1 = 20, 17$. Jika a_1, a_2, \dots, a_{11} dan $\lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \dots, \lfloor a_{10} \rfloor$ masing-masing merupakan barisan aritmatika, sedangkan $\lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \dots, \lfloor a_{11} \rfloor$ bukan barisan aritmatika, maka nilai minimum $a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor$ adalah...
18. Di suatu pusat jajanan terdapat empat kedai yang masing-masing menjual tiga jenis makanan. Ada n orang yang masing-masing membeli tepat satu makanan pada setiap kedai. Untuk setiap tiga pembeli ada paling sedikit kedai yang ketiga jenis makanannya terbeli. Nilai n maksimum yang mungkin adalah...
19. Diketahui segi tujuh beraturan $ABCDEFGH$. Jarak dari A ke garis BC, BE, CF , dan EF berturut-turut adalah a, b, c , dan d . Nilai $\frac{ad}{bc}$ adalah...
20. Diketahui $f(x)$ polinom berderajat n dengan koefisien-koefisien bilangan bulat yang

memenuhi $f(0) = 39$ dan $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \dots = f(x_n) = 2017$, dengan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ semua berbeda. Bilangan n terbesar yang mungkin adalah...

B. Uraian

1. Untuk setiap persegi satuan pada papan berukuran 5×9 dituliskan angka 1 atau 0. Kemudian dihitung jumlah semua bilangan pada setiap kolom dan juga pada setiap barisnya sehingga diperoleh 14 bilangan. Misalkan H adalah himpunan yang berisi bilangan-bilangan tersebut. Tentukan maksimum dari banyak anggota H
2. Bilangan asli $k > 2$ dikatakan **cantik** jika untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ dengan $5n + 1$ bilangan kuadrat sempurna, dapat ditemukan bilangan asli a_1, a_2, \dots, a_k sehingga

$$n + 1 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$$

Tentukan bilangan **cantik** terkecil

3. Diberikan segitiga ABC yang ketiga garis tingginya berpotongan di titik H . Tentukan semua titik X pada sisi BC sehingga pencerminan H terhadap titik X terletak pada lingkaran luar segitiga ABC .
4. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan-bilangan real yang nilai mutlaknya tidak lebih besar dari 1. Buktikan bahwa $\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} \leq 2 + \sqrt{2}$
5. Pada suatu papan catur berukuran $2017 \times n$, Ani dan Banu melakukan permainan. Pemain pertama memilih suatu persegi dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Pemain berikutnya memilih suatu persegi dari daerah yang belum diberi warna merah dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Persegi yang dipilih boleh sebarang ukuran namun harus tepat menutup sejumlah persegi satuan pada papan catur. Kemudian kedua pemain bergantian melakukan hal tersebut. Seorang pemain dikatakan menang, jika pemain berikutnya tidak bisa lagi melanjutkan permainan. Jika Ani mendapat giliran perta, tentukan semua nilai $n \geq 2017$ sehingga Ani mempunyai strategi untuk memenangkan permainan.