

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2016

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Misalkan a, b, c tiga bilangan asli yang memenuhi $2^a + 2^b + 2^c = 100$. Nilai dari $a + b + c$ adalah...
2. Suatu fungsi f mempunyai sifat $f(65x + 1) = x^2 - x + 1$ untuk semua bilangan real x . Nilai $f(2016)$ adalah...
3. Tiga bilangan berbeda a, b, c akan dipilih satu persatu secara acak dari $1, 2, 3, 4, \dots, 10$ dengan memperhatikan urutan. Probabilitas bahwa $ab + c$ genap adalah...
4. Titik P adalah suatu titik pada segiempat konveks $ABCD$ dengan $PA = 2, PB = 3, PC = 5$, dan $PD = 6$. Luas maksimum segiempat $ABCD$ adalah...
5. Jika $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dan $4 \tan x + 9 \cot x \leq 12$, maka nilai $\sin x$ yang mungkin adalah...
6. Untuk setiap bilangan asli n , misalkan $s(n)$ menyatakan jumlah hasil digit-digit n dalam penulisan desimal. Sebagai contoh, $s(2016) = 2 + 0 + 1 + 6 = 9$. Hasil jumlah semua bilangan asli n sehingga $n + s(n) = 2016$ adalah...
7. Di antara 30 siswa, 15 siswa senang atletik, 17 siswa senang basket, dan 17 siswa senang catur. Siswa yang senang atletik dan basket sama banyak dengan siswa yang senang basket dan catur. Sebanyak 8 siswa senang atletik dan catur. Siswa yang senang basket dan catur sebanyak dua kali siswa yang senang ketiganya. Sedangkan 4 siswa tidak senang satupun dari ketiganya. Dari 30 siswa tersebut dipilih tiga siswa secara acak. Probabilitas masing-masing siswa yang terpilih hanya senang catur saja atau basket saja adalah...
8. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 5. Titik I dan J sebarang pada BF dengan $IJ = 1$. Titik K dan L sebarang pada CG dengan $KL = 2$. Semut bergerak dari A ke H dengan lintasan $AIJKLH$. Panjang lintasan terpendek adalah...
9. Banyaknya tripel bilangan prima (p, q, r) yang memenuhi $15p + 7pq + qr = pqr$ adalah...
10. Jika $x^2 + xy + 8x = -9$ dan $4y^2 + 3xy + 16y = -7$, maka nilai $x + 2y$ yang mungkin adalah...
11. Panjang rusuk-rusuk suatu limas segitiga semuanya adalah bilangan bulat. Lima rusuknya masing-masing memiliki panjang 14, 20, 40, 52, dan 70. Banyaknya kemungkinan panjang rusuk yang keenam adalah...

12. Seorang pemain catur setiap hari bertanding minimum satu kali selama tujuh hari dengan total m pertandingan. Nilai m maksimum agar ada dua atau lebih hari yang berturut-turut dengan total pertandingannya empat kali adalah...
13. Rumah Pak Adi memiliki meteran air yang rusak, dimana meteran tersebut tidak dapat menunjukkan angka 3 dan 9. Sebagai contoh, angka yang tertunjuk pada meteran setelah angka 22 adalah 24 dan juga angka yang tertunjuk setelah 28 adalah 40. Misalkan dalam satu bulan, meteran air Pak Adi menunjukkan angka 478 m^3 . Kerugian yang sebenarnya ditanggung oleh Pak Adi karena meteran yang rusak tersebut adalah... m^3
14. Untuk sebarang bilangan real x , notasi $[x]$ mentakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari x . Hasil jumlah semua bilangan real x yang memenuhi $|8x - 1008| + [x] = 2016$ adalah...
15. Misalkan a_1, a_2, \dots, a_{120} adalah 120 permutasi kata MEDAN yang diurutkan berdasarkan abjad seperti di kamus, misalnya $a_1 = ADEM N$, $a_2 = ADE N M$, $a_3 = ADMEN$, dan seterusnya. Hasil jumlah semua indeks k sehingga huruf A merupakan huruf ketiga pada permutasi a_k adalah...
16. Misalkan $ABCDE$ adalah suatu segilima beraturan dengan luas 2. Titik P, Q, R, S, T adalah perpotongan antar diagonal-diagonal dari segilima $ABCDE$ sedemikian hingga $PQRST$ adalah suatu segilima beraturan. Jika luas $PQRST$ ditulis dalam bentuk $a - \sqrt{b}$ dengan a dan b bilangan asli, maka nilai $a + b$ adalah...
17. Segitiga ABC mempunyai lingkaran luar berjari-jari 1. Jika dua garis berat segitiga ABC masing-masing mempunyai panjang 1, maka keliling segitiga ABC adalah...
18. Barisan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ didefinisikan dengan $x_0 = 10, x_1 = 5$, dan
- $$x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{1}{x_k}$$
- untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ dan diperoleh $x_n = 0$. Nilai n adalah...
19. Dalam suatu turnamen sepak bola yang diikuti oleh n tim, tiap tim bermain melawan tim lainnya tepat satu kali. Dalam satu pertandingan, 3 poin akan diberikan kepada tim yang menang dan 0 poin untuk tim yang kalah. Sedangkan 1 poin diberikan kepada masing-masing tim apabila pertandingan berakhir seri. Setelah pertandingan berakhir, hanya satu tim yang memperoleh poin paling banyak dan hanya tim itu yang memperoleh jumlah kemenangan paling sedikit. Nilai n terkecil sehingga hal ini mungkin terjadi adalah...
20. Barisan bilangan non-negatif a_1, a_2, a_3, \dots didefinisikan dengan $a_1 = 1001$ dan $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$ untuk $n \geq 1$. Jika diketahui bahwa $a_2 < 1001$ dan $a_{2016} = 1$, maka banyaknya nilai a_2 yang mungkin adalah...

B. Uraian

1. Misalkan a dan b bilangan real positif berbeda sehingga $a + \sqrt{ab}$ dan $b + \sqrt{ab}$ merupakan bilangan rasional. Buktikan bahwa a dan b merupakan bilangan rasional
2. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi $ab + bc + cd + da = 2016$. Catatan: jawaban dalam bentuk paling sederhana
3. Untuk bilangan asli k , kita katakan persegi panjang berukuran $1 \times k$ atau $k \times 1$ sebagai pita. Suatu persegi panjang berukuran $2016 \times n$ dipotong menjadi pita-pita yang semua ukurannya berbeda. Tentukan bilangan asli $n \leq 2016$ terbesar sehingga kita bisa melakukan hal tersebut.
Catatan: Pita $1 \times k$ dan $k \times 1$ dianggap berukuran sama
4. Misalkan PA dan PB adalah garis singgung lingkaran ω dari suatu titik P di luar lingkaran. Misalkan M adalah sebarang titik pada AP dan N adalah titik tengah AB . Perpanjangan MN memotong ω di C dengan N di antara M dan C . Misalkan PC memotong ω di D dan perpanjangan ND memotong PB di Q . Tunjukkan bahwa MQ sejajar dengan AB .
5. Diberikan tripel bilangan asli berbeda (x_0, y_0, z_0) yang memenuhi $x_0 + y_0 + z_0 = 2016$. Setiap jam ke- i , dengan $i \geq 1$, dibentuk tripel baru

$$(x_i, y_i, z_i)(y_{i-1} + z_{i-1} - x_{i-1}, z_{i-1} + x_{i-1} - y_{i-1}, x_{i-1} + y_{i-1} - z_{i-1})$$

Tentukan bilangan asli n terkecil sehingga pada jam ke- n pasti ditemukan minimal satu di antara x_n, y_n, z_n merupakan bilangan negatif.