

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2015

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi

$$x^2 - 2x = 2 + x\sqrt{x^2 - 4x}$$

adalah...

2. Banyaknya bilangan bulat n , sehingga $n + 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 1$ adalah...

3. Dalam suatu pesta, setiap pria berjabat tangan dengan pria lain hanya sekali. Demikian juga, setiap wanita hanya berjabat tangan sekali dengan wanita lain yang hadir dalam pesta tersebut. Tidak ada yang berjabat tangan antara pria dan wanita dalam pesta tersebut. Jika banyaknya pria yang hadir dalam pesta lebih banyak dari wanita dan jumlah jabat tangan antara pria atau wanita ada 7 jabat tangan. Banyaknya pria yang hadir dalam pesta tersebut adalah...

4. Diberikan segitiga ABC , melalui titik D yang terletak pada sisi BC ditarik garis DE dan DF berturut-turut sejajar dengan AB dan AC , (E pada AC , F pada AB). Jika luas segitiga DEC sama dengan 4 kali luas segitiga BDF , maka perbandingan luas segitiga AEF dengan luas segitiga ABC adalah...

5. Jika f adalah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan berlaku

$$3f(x) - 2f(x - 2) = x^{\textcircled{a}} + 8x - 9$$

untuk semua bilangan real x , maka nilai $f(2015)$ adalah...

6. Banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b + 1} = \frac{1}{2015}$$

adalah...

7. Ada 10 orang, lima laki-laki dan lima perempuan, termasuk sepasang pengantin. Seorang tukang foto yang bukan salah satu di antara 10 orang tersebut akan mengambil gambar enam orang di antara mereka, termasuk kedua pengantin, dengan tidak ada dua laki-laki maupun perempuan yang berdekatan. Banyaknya cara adalah...
8. Panjang sisi-sisi segitiga merupakan bilangan bulat berurutan, dan sudut terbesar dua kali sudut terkecil. Nilai cosinus sudut terkecil adalah...

9. Diberikan dua suku banyak kuadrat berbeda $f(x) = x^2 + ax + b$ dan $g(x) = x^2 + cx + d$ yang memenuhi $f(20) + f(15) = g(20) + g(15)$. Jumlah semua bilangan real x yang memenuhi $f(x) = g(x)$ sama dengan...

10. Diberikan a dan b bilangan bulat positif dengan

$$\frac{53}{201} < \frac{a}{b} < \frac{4}{15}$$

Nilai b terkecil yang mungkin adalah...

11. Misalkan pada suatu laboratorium terdapat 20 komputer dan 15 printer. Kabel digunakan untuk menghubungkan komputer dan printer. Sayangnya, satu printer hanya dapat melayani satu komputer pada suatu waktu bersamaan. Diinginkan 15 komputer selalu dapat menggunakan printer pada waktu bersamaan. Banyaknya kabel yang diperlukan untuk menghubungkan komputer dan printer minimal ada sebanyak...

12. Diberikan segitiga ABC dengan M pertengahan BC , dan pada sisi AB dipilih titik N sehingga $NB = 2NA$. Jika $\angle CAB = \angle CMN$, maka nilai dari $\frac{AC}{BC}$ adalah...

13. Diberikan barisan a_0, a_1, a_2, \dots dengan $a_0 = 2, a_1 = \frac{8}{3}$ dan

$$a_m a_n = a_{m+n} - a_{m-n}$$

untuk setiap bilangan asli m, n dengan $m \geq n$. Banyaknya bilangan asli n yang memenuhi

$$a_n - 3^n > \frac{1}{2015}$$

adalah...

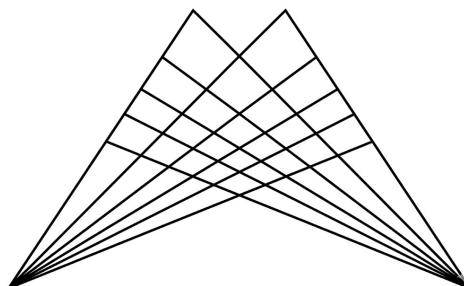
14. Untuk bilangan real x , notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari x , sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dari x . Bilangan real x yang memenuhi

$$\lfloor x \rfloor^2 - 3x + \lceil x \rceil$$

adalah...

15. Suatu lingkaran memotong segitiga samasisi ABC pada enam titik yang berbeda. Keenam titik komposisinya, setiap dua titik terletak pada sisi segitiga, sehingga: $B; D; E; C; F; G; A$ dan $A; H; J; B$ berturut-turut segaris. Jika $AG = 2, GF = 13, FC = 1$, dan $HJ = 7$, maka panjang DE adalah...

16. Pada gambar terdapat segitiga sebanyak...



17. Misalkan M dan m berturut-turut merupakan nilai a terbesar dan terkecil sehingga berlaku

$$\left| x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4} \right| \geq 1$$

untuk setiap $x \in [0, 1]$. Nilai dari $M - m$ adalah...

18. Semua bilangan bulat n sehingga $\frac{9n+1}{n+3}$ merupakan kuadrat suatu bilangan rasional adalah...
19. Himpunan A bagian dari $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ dikatakan *baik*, jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $a - 1 \in A$ atau $a + 1 \in A$. Banyaknya himpunan bagian dengan lima anggota dari $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ yang *baik* ada sebanyak...
20. Diberikan segitiga samakaki ABC , dengan $AB = AC = b$, $BC = a$, dan $\angle BAC = 100^\circ$. Jika BL garis bagi $\angle ABC$, maka nilai $AL + BL$ adalah...

B. Uraian

1. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Misalkan $F = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_m\}$, dengan $A_i \subseteq X$ dan anggota A_i sebanyak 2, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$. Tentukan m minimum sehingga untuk sebarang $B \subseteq X$, dengan B beranggotakan sebanyak 3, terdapat anggota F yang termuat di B . Buktikan jawaban anda

2. Tentukan semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$(x + 1)^2 = x + y + 2(y + 1)^2 = y + z + 2(z + 1)^2 = z + x + 2$$

3. Diberikan segitiga samakaki ABC , dengan $AB = AC$. Misalkan D titik pada segmen BC sehingga $BD = 2DC$. Misalkan pula bahwa P titik pada segmen AD sehingga $\angle BAC = \angle BPD$. Buktikan bahwa $\angle BAC = 2\angle DPC$
4. Misalkan p_1, p_2, \dots, p_n barisan aritmatika dengan beda $b > 0$ dan p_i prima untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

(a) Jika $p_1 > n$, tunjukkan bahwa setiap bilangan prima p dengan $p \leq n$, maka p membagi habis b

(b) Berikan contoh barisan aritmatika p_1, p_2, \dots, p_{10} , dengan beda positif dan p_i prima untuk $i = 1, 2, \dots, 10$

5. Diberikan himpunan yang terdiri 22 bilangan bulat, $A = \{\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_{11}\}$.

(a) Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 11$ paling banyak hanya satu di antara a_i atau $-a_i$ merupakan anggota S

(b) Jumlah semua bilangan di S habis dibagi 2015