

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2014

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Jika $y = f(x)$ adalah fungsi yang memenuhi persamaan $\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$, maka daerah hasil dari fungsi tersebut adalah...
2. Jika $n \geq 1$ adalah bilangan asli maka, kelipatan persekutuan terkecil dari $3^n - 3$ dan $9^n + 9$ adalah...
3. Diberikan persegi $ABCD$, titik P di dalam persegi sehingga $AP = 3$, $BP = 7$, dan $DP = 5$. Luas persegi $ABCD$ adalah...
4. Bilangan segitiga ke- n adalah jumlah dari n bilangan asli pertama. Didefinisikan T_n adalah jumlah n bilangan segitiga pertama. Jika $T_n + xT_{n-1} + yT_{n-2} = n$ dimana x dan y adalah bilangan bulat, maka $x - y = \dots$
5. Lingkaran ω_1 dan ω_2 bersinggungan di titik A dan mempunyai garis singgung sekutu l yang menyinggung ω_1, ω_2 berturut-turut di B dan C . Jika BD merupakan diameter lingkaran ω_1 dengan panjang 2, dan $BC = 3$ luas segitiga BDC adalah...
6. Untuk sebarang bilangan real x , didefinisikan $[x]$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x . Jumlah 2014 digit terakhir dari $\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$ adalah...
7. Untuk persiapan OSP, seorang guru mengadakan pembinaan kepada para siswa selama satu minggu. Setiap hari, pada minggu pembinaan tersebut, setiap siswa mengirimkan 5 email kepada siswa lain atau guru. Pada acara penutupan, setengah dari siswa tersebut mendapat 6 email, sepertiga siswa mendapat 4 email dan sisanya masing-masing satu email. Sang guru mendapat 2014 email. Jika guru tersebut diperbolehkan mengambil cuti pada pekan pembinaan, maka banyaknya cuti yang digunakan adalah... hari.
Catatan: saat guru mengambil cuti, siswa tetap belajar di kelas secara mandiri dan hanya mengirim email kepada semua siswa.
8. Jumlah dari semua bilangan bulat x sehingga $^2 \log(x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah...
9. Jika akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ berada dalam interval $[0, 1]$, maka nilai maksimum dari $\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)}$ adalah...
10. Semua $n \leq 1000$ sedemikian sehingga bilangan $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 999}_{n \text{ angka } 9}$ pada digit-digitnya terdapat tepat n buah angka 1 adalah...

11. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi satu satuan. Misalkan lingkaran Γ dengan AD sebagai diameter, dan pilih titik E pada sisi AB sehingga garis CE menjadi garis singgung pada Γ . Luas segitiga BCE adalah...
12. Suatu sekolah mempunyai empat kelompok belajar kelas 11. Masing-masing kelompok belajar mengirimkan dua siswa untuk suatu pertemuan. Mereka akan duduk melingkar dengan tidak ada dua siswa dari satu kelompok belajar yang duduk berdekatan. Banyaknya cara adalah...
(Dua cara mereka duduk melingkar dianggap sama jika salah satu cara dapat diperoleh dari cara yang lain dengan suatu rotasi)
13. Dono memiliki enam kartu. Setiap kartu ditulis satu bilangan bulat positif. Untuk setiap putaran, dono mengambil 3 kartu secara acak dan menjumlahkan ketiga bilangan yang ada pada kartu-kartu tersebut. Setelah melakukan 20 kemungkinan dalam memilih 3 dari 6 kartu, Dono mendapatkan angka 16 sebanyak 10 kali dan angka 18 sebanyak 10 kali. Bilangan terkecil yang terdapat pada kartu adalah...
14. Untuk bilangan real t dan bilangan real positif a dan b berlaku

$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2$$

nilai t adalah...

15. Misalkan $S(n)$ menyatakan hasil penjumlahan digit-digit dari n , sebagai contoh $S(567) = 5 + 6 + 7 = 18$. Banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 1000 sehingga $\frac{S(n)}{S(n+1)}$ merupakan bilangan bulat adalah...
16. Diberikan segitiga ABC , dengan sisi-sisi: $AB = c, BC = a, CA = b = \frac{1}{2}(a + c)$. Ukuran terbesar dari $\angle ABC$ adalah...
17. Di dalam segitiga ABC , di gambar titik X, Y, Z dengan aturan $\angle XBC = \angle ZBA = \frac{\angle ABC}{3}, \angle XCB = \angle YCA = \frac{\angle BCA}{3}, \angle ZAB = \angle YAC = \frac{\angle BAC}{3}$. Besar sudut XYZ adalah...
18. Misalkan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. Banyaknya triple bilangan bulat positif (a, b, c) sehingga $\tan \alpha = \frac{1}{a}, \tan \beta = \frac{1}{b},$ dan $\tan \gamma = \frac{1}{c}$ adalah...
19. Semua triple bilangan ganjil berurutan (a, b, c) dengan $a < b < c$ sedemikian sehingga $a^2 + b^2 + c^2$ merupakan bilangan dengan 4 digit (angka) yang semua digitnya sama adalah...
20. Diketahui suatu partikel pada koordinat Cartesius, semua tertelak pada titik asal $(0, 0)$. Partikel tersebut bergerak, setiap langkah adalah satu unit searah sumbu X positif, searah sumbu X negatif, searah sumbu Y positif, atau searah sumbu Y negatif. Banyaknya cara partikel tersebut bergerak agar setelah bergerak 9 langkah partikel tersebut pada titik $(2, 3)$ adalah...

B. Uraian

1. Untuk sebarang bilangan real positif a, b, c dengan $a + b + c = 1$, tentukan nilai

$$ab \left(\frac{a^2 + b^2}{a^3 + b^3} \right) + bc \left(\frac{b^2 + c^2}{b^3 + c^3} \right) + ca \left(\frac{c^2 + a^2}{c^3 + a^3} \right) + \frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} + \frac{b^4 + c^4}{b^3 + c^3} + \frac{c^4 + a^4}{c^3 + a^3}$$

2. Diberikan segitiga ABC lancip dengan $AB < AC$. Lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang berlawanan terhadap B dan C berturut-turut berpusat di B_1 dan C_1 . Misalkan D titik tengah dari B_1C_1 . Misalkan pula E salah satu titik perpotongan dari AB dan CD , serta F adalah titik perpotongan dari AC dan BD . Jika EF memotong BC di G , buktikan bahwa AG adalah garis bagi dari $\angle BAC$. (Lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang berlawanan terhadap B didefinisikan sebagai lingkaran yang menyinggung AC di segemennya serta menyinggung AB dan BC diperpanjangannya)
3. Diketahui X adalah himpunan dengan 102 anggota. Misalkan A_1, A_2, \dots, A_{101} adalah himpunan-himpunan bagian dari X sehingga gabungan dari setiap 50 diantaranya mempunyai lebih dari 100 anggota. Buktikan terdapat $1 \leq i < j < k \leq 101$ sedemikian sehingga $A_i \cap A_j, A_j \cap A_k$, dan $A_i \cap A_k$ semuanya tidak kosong.
4. Misalkan Γ adalah lingkaran luar segitiga ABC . Satu lingkaran ω menyinggung Γ di A dan menyinggung BC di N . Misalkan perpanjangan AN memotong Γ lagi di E . Misalkan AD dan AF berturut-turut adalah garis tinggi ABC dan diameter Γ , tunjukkan bahwa $AN \times AE = AD \times AF = AB \times AC$.
5. Misalkan $\{a_n\}$ merupakan barisan bilangan bulat yang memenuhi $a_1 = 2, a_2 = 8$, dan

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$$

- (a) Apakah a_{2014} prima?
- (b) tunjukkan bahwa untuk setiap m ganjil, bilangan $\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}}$ merupakan bilangan bulat.