

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2012

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Isian Singkat

1. Misalkan O dan I berturut-turut menyatakan titik pusat lingkaran luar dan titik pusat lingkaran dalam pada segitiga dengan panjang sisi 3, 4, dan 5. Panjang dari OI adalah...
2. Misalkan x, y , dan z adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan $34x - 51y = 2012z$. Nilai dari $x + y + z$ adalah...
3. Diketahui empat dadu setimbang dan berbeda, yang masing-masing berbentuk segi delapan beraturan bermata $1, 2, 3, \dots, 8$. Empat dadu tersebut ditos (dilempar) bersama-sama satu kali. Probabilitas kejadian ada dua dadu dengan mata yang muncul sama sebesar...
4. Fungsi bernilai real f dan g masing-masing memiliki persamaan

$$f(x) = \sqrt{[x] - a} \text{ dan } g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2}}}$$

dengan a bilangan bulat positif. Diketahui $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x . Jika domain $g \circ f$ adalah $\{x | 3\frac{1}{2} \leq x < 4\}$, maka banyaknya a yang memenuhi sebanyak...

5. Diberikan bilangan prima $p > 2$. Jika S adalah himpunan semua bilangan asli n yang menyebabkan $n^2 + pn$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat, maka $S = \dots$
6. Diberikan bilangan real x didefinisikan $\{x\}$ sebagai bilangan bulat yang terdekat dengan x , sebagai contoh $\{1,9\} = 2, \{-0,501\} = -1$, dan sebagainya. Jika n adalah suatu bilangan bulat positif kelipatan 2012, maka banyak bilangan bulat positif k yang memenuhi $\{\sqrt[3]{k}\} = n$ adalah...
7. Banyak bilangan bilangan asli $n < 100$ yang mempunyai kelipatan yang berbentuk

$$123456789123456789 \dots 123456789$$

adalah

8. Diberikan parallelogram (jajar genjang) $ABCD$. Titik M pada AB sedemikian rupa sehingga $\frac{AM}{AB} = 0,017$, dan titik N pada AD sehingga $\frac{AN}{AD} = \frac{17}{2009}$. Misalkan $AC \cap MN = P$, maka $\frac{AC}{AP} = \dots$

9. Dalam sebuah pertemuan, 5 pasang suami istri akan didudukkan pada sebuah meja bundar. Berapa banyak cara untuk mengatur posisi duduk 5 pasang suami istri tersebut sedemikian sehingga tepat 3 suami istri duduk disamping istrinya.
10. Jika p, q , dan r akar-akar dari $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, maka $p^3 + q^3 + r^3 = \dots$
11. Jika m dan n bilangan bulat positif yang memenuhi $m^2 + n^2 = 252$, maka $m + n = \dots$
12. Pada $\triangle ABC$, titik D terletak pada garis BC . Panjang $BC = 3$, $\angle ABC = 30^\circ$, dan $\angle ADC = 45^\circ$. Panjang $AC = \dots$
13. Lima siswa A, B, C, D, E berada pada satu kelompok dalam lomba lari estafet. Jika A tidak bisa berlari pertama dan D tidak bisa berlari terakhir, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah \dots
14. Diketahui H adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari 2012 yang faktor primanya tidak lebih dari 3. Selanjutnya didefinisikan himpunan $S = \{\frac{1}{n} | n \in H\}$. Jika x merupakan hasil penjumlahan dari semua anggota S dan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x , maka $[x] = \dots$
15. Diberikan dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang berpotongan di dua titik yaitu A dan B dengan $AB = 10$. Ruas garis yang menghubungkan titik pusat kedua lingkaran memotong lingkaran Γ_1 dan Γ_2 masing-masing di P dan Q . Jika $PQ = 3$ dan jari-jari lingkaran Γ_1 adalah 13, maka jari-jari lingkaran Γ_2 adalah \dots
16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$ adalah \dots
17. Untuk bilangan real positif x dan y dengan $xy = \frac{1}{3}$, nilai minimum $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$ adalah \dots
18. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ adalah \dots
19. Diberikan segitiga ABC , dengan panjang AB sama dengan dua kali panjang AC . Misalkan D dan E berturut-turut pada segmen AB dan BC , sehingga $\angle BAE = \angle ACD$. Jika $F = AE \cap CD$ dan CEF merupakan segitiga sama sisi, maka besar sudut dari ABC adalah \dots
20. Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi $n \leq 2012$ dan merupakan bilangan kuadrat sempurna atau kubik atau pangkat 4 atau pangkat 5 atau \dots atau pangkat 10, ada sebanyak \dots

B. Uraian

1. Tentukan semua pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, x, y) yang memenuhi sistem persamaan

2. Cari semua pasangan bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b = xy \\ x + y = ab \end{cases}$$

3. Seorang laki-laki memiliki 6 teman. Pada suatu malam di suatu restoran, dia bertemu dengan masing-masing mereka 11 kali, setiap 2 dari mereka 6 kali, setiap 3 dari mereka 4 kali, setiap 4 dari mereka 3 kali, setiap 5 dari mereka 3 kali dan semua mereka 10 kali. Dia makan di luar 9 kali tanpa bertemu mereka. Berapa kali dia makan di restoran tersebut secara keseluruhan?

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{y - z^2} \\ y = 1 + \sqrt{z - x^2} \\ z = 1 + \sqrt{x - y^2} \end{cases}$$

4. Diberikan segitiga lancip ABC . Titik H menyatakan titik kaki dari garis tinggi yang ditarik dari A . Buktikan bahwa $AB + AC \geq BC \cos \angle BAC + 2AH \sin \angle BAC$
5. Diketahui $p_0 = 1$ dan p_i bilangan prima ke- i , untuk $i = 1, 2, 3, \dots$; yaitu $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$. Bilangan prima p_i dikatakan *sederhana* jika

$$p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$$

untuk semua bilangan bulat positif n . Tentukan semua bilangan prima yang sederhana