

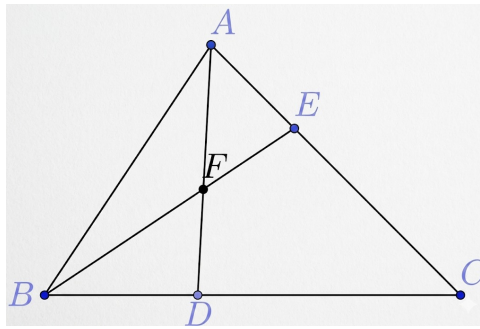
SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2011

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$. Misalkan garis bagi sudut ABC memotong AC di titik D sehingga $BC = BD + AD$. Besar sudut CAB adalah...
2. Jika n bilangan asli dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n}$ merupakan bilangan bulat, maka pembagi positif dari n sebanyak...
3. Jika $a \geq b > 1$, maka nilai terbesar yang mungkin untuk ${}^a \log \left(\frac{b}{a}\right) + {}^b \log \left(\frac{b}{a}\right)$ adalah...
4. Diketahui segi empat $ABCD$. Semua titik A, B, C , dan D akan diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5, atau 6 sehingga setiap dua titik yang terletak dalam satu sisi empat nomornya berbeda. Banyaknya cara pemberian nomor dengan cara tersebut ada sebanyak...
5. Diberikan fungsi f dengan $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$. Semua nilai a yang mungkin sehingga domain dan daerah hasil sama adalah...
6. Banyaknya kemungkinan bilangan asli berbeda a, b, c , dan d yang kurang dari 10 dan memenuhi persamaan $a + b = c + d$ ada sebanyak...
7. Jika kedua akar persamaan $x^2 - 2013x + k = 0$ adalah bilangan prima, maka nilai k yang mungkin adalah...
8. Jika $(1 - \tan^2 \frac{x}{2^{2011}}) (1 - \tan^2 \frac{x}{2^{2010}}) \cdots (1 - \tan^2 \frac{x}{2}) = 2^{2011} \sqrt{3} \tan \frac{x}{2^{2011}}$, maka $\sin 2x$ adalah...
9. Pada ruang Cartesius kita ingin bergerak dari titik $(2, 0, 11)$ ke titik $(20, 1, 1)$ selalu pada koordinat (x, y, z) dengan paling sedikit dua dari x, y, z adalah bilangan bulat, dan lintasan terpendek. Cara bergerak yang dimaksud sebanyak...
10. Misalkan x, y, z adalah bilangan real positif dengan sifat $xyz = 1$. Nilai terkecil dari

$$(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1)$$
 tercapai saat $x + y + z$ bernilai...
11. Pada gambar di bawah ini, panjang $AE = x$, $EC = y$, dan $DC = 2BD$. Perbandingan panjang BF dan FE dinyatakan dalam x dan y adalah...



12. Banyak bilangan tiga digit yang semua digit-digitnya berbeda dan digit terakhir merupakan hasil penjumlahan dari dua digit yang lainnya adalah...
13. Diberikan barisan bilangan rasional $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ yang didefinisikan dengan $a_1 = 2$ dan $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Nilai a_{2011} adalah...
14. Misalkan Γ lingkaran luar segitiga ABC . Talibusur AD adalah garis bagi $\angle BAC$ yang memotong BC di titik L . Talibusur DK tegak lurus pada AC dan memotongnya di titik M . Jika $\frac{BL}{BC} = \frac{1}{2}$, maka perbandingan $\frac{AM}{MC} = \dots$
15. Dua dadu memiliki angka 1 sampai 6 yang dapat dilepas dari dadu. Kedua belas angka tersebut dilepas dari dadu dan dimasukkan ke dalam suatu kantong. Secara acak diambil satu angka dan dipasangkan ke salah satu dari kedua dadu tersebut. Setelah semua angka terpasangkan, kedua dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang munculnya angka tujuh sebagai jumlah dari angka pada bagian atas kedua dadu tersebut adalah...
16. Banyaknya bilangan asli n sehingga setiap titik dengan koordinat bilangan asli yang terletak pada garis $x + y = n$ mempunyai jarak suatu bilangan prima terhadap titik $(0, 0)$ adalah...
17. Bilangan asli n yang memenuhi $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 2000 adalah...
18. Sepuluh orang siswa duduk dalam suatu baris. Semua siswa bangkit dan duduk kembali pada baris tersebut dengan aturan setiap siswa dapat duduk kembali pada kursi yang sama atau pada kursi yang berada di sebelah kursi lamanya. Banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak...
19. Bilangan asli $n \leq 123456$ sehingga terdapat bilangan asli x dengan sifat jumlah semua digit dari x^2 sama dengan n adalah...
20. Misalkan ABC suatu segitiga dan P titik di dalam segitiga. Misalkan D, E, F berturut-turut titik di sisi-sisi BC, CA, AB sedemikian sehingga PD tegak lurus BC , PE tegak lurus CA , dan PF tegak lurus AB . Jika segitiga DEF sama sisi dan $\angle APB = 70^\circ$, maka $\angle ACB = \dots$

B. Uraian

1. Tentukan semua nilai k yang mungkin sehingga tidak ada pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 0 \\(x - k)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

2. Suatu bilangan dikatakan *cantik* jika memenuhi sekaligus dua kondisi berikut:
 - (a) merupakan kuadrat sempurna, yaitu kuadrat dari suatu bilangan asli.
 - (b) jika digit paling kanan pada penulisan desimalnya dipindah posisinya menjadi digit paling kiri, maka bilangan yang terbentuk masih merupakan bilangan kuadrat sempurna

Sebagai contoh, 441 merupakan bilangan *cantik* terdiri dari 3 digit, karena $441 = 21^2$ dan $144 = 12^2$. Buktikan bahwa terdapat bilangan *cantik* yang penulisan desimalnya terdiri dari tepat 2011 digit

3. Misalkan A himpunan semua pembagi positif dari 10^9 . Jika dipilih dua bilangan sebarang x dan y di A (boleh sama), tentukan peluang dari kejadian x membagi y
4. Diberikan persegi panjang (siku empat) $ABCD$ dengan $AB = a$ dan $BC = b$. Titik O adalah perpotongan antara kedua diagonalnya. Perpanjangan sisi BA sehingga $AE = AO$, juga perpanjangan diagonal BD sehingga $BZ = BO$. Asumsikan segitiga EZC sama sisi. Buktikan bahwa
 - (a) $b = a\sqrt{3}$
 - (b) EO tegak lurus ZD
5. Misalkan M adalah himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$ dan tidak ada tiga angka anggota M yang hasil kalinya berbentuk kuadrat sempurna. Tentukan banyak maksimum anggota M yang mungkin