

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2010

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Nilai $\sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 8^i \right) \right)$
2. Pada segitiga ABC dimisalkan a, b , dan c berturut-turut merupakan panjang sisi BC, CA , dan AB . Jika $\frac{2}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$, maka nilai $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B}$ adalah...
3. Diberikan polinom $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan a, b, c , dan d konstan. Jika $P(1) = 10, P(2) = 20$, dan $P(3) = 30$, maka nilai $\frac{P(12) + P(-8)}{10} = \dots$
4. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Banyaknya fungsi $f : S \rightarrow S$ yang memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in S$ adalah...
5. Jika a, b , dan c menyatakan panjang sisi-sisi suatu segitiga yang memenuhi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, maka besar sudut yang menghadap sisi dengan panjang c adalah...
6. Bilangan enam digit \overline{abcdef} dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak...
7. Bilangan prima p sehingga $p^2 + 73$ merupakan bilangan kubik sebanyak...
8. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C , $AC = 3$, dan $BC = 4$. Segitiga ABD siku-siku di A , $AD = 12$, dan titik C dan D letaknya berlawanan terhadap sisi AB . Garis sejajar AC melalui D memotong perpanjangan CB di E . Jika $\frac{DE}{DB} = \frac{m}{n}$ dengan m dan n bilangan bulat positif yang relatif prima, maka $m + n = \dots$
9. Pada suatu lingkaran terdapat 12 titik yang berbeda. Dengan menggunakan 12 titik tersebut akan dibuat 6 tali busur yang tidak berpotongan. Banyaknya cara ada sebanyak...
10. Banyaknya anggota himpunan $S = \{gcd(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) | n \in Z\}$ adalah...
11. Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real α dan β . Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah...
12. Pada suatu bidang terdapat n titik yang berkoordinat pasangan bilangan bulat. Nilai n terkecil agar terdapat dua titik yang titik tengahnya juga berkoordinat pasangan bilangan bulat adalah...
13. Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $[x]$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x . Bilangan asli n sehingga persamaan $x \left[\frac{1}{x} \right] + \frac{1}{x} [x] = \frac{n}{n+1}$ mempunyai tepat 2010 solusi real positif adalah...

14. Dua lingkaran (tidak sama besar) bersinggungan di luar. Titik A dan A_1 terletak pada lingkaran kecil; sedangkan B dan B_1 pada lingkaran besar. Garis PAB dan PA_1B_1 merupakan garis singgung persekutuan dari kedua lingkaran tersebut. Jika $PA = AB = 4$, maka luas lingkaran kecil adalah...
15. Dua puluh tujuh siswa pada suatu kelas akan dibuat menjadi enam kelompok diskusi yang masing-masing terdiri dari empat atau lima siswa. Banyaknya cara adalah...
16. Seorang menulis surat berantai kepada 6 orang. Penerima surat ini diperintahkan untuk mengirim surat kepada 6 orang lainnya. Semua penerima surat membaca isi surat lalu beberapa orang melaksanakan perintah tertulis dalam surat, sisanya tidak melanjutkan surat berantai ini. Jika terdapat 366 orang yang tidak melanjutkan surat berantai ini, maka banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai ini adalah...
17. Jumlah suku konstan dari $(x^5 - \frac{2}{x^3})^2$
18. Banyaknya bilangan bulat positif $n > 100$, sehingga persamaan $\frac{3xy-1}{x+y} = n$ mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x, y) adalah...
19. Diketahui x, y , dan z adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ xyz &= 1 \end{aligned}$$

Nilai terkecil $|x + y + z|$ adalah...

20. Segitiga ABC memiliki panjang sisi $BC = 5$, $AC = 12$, dan $AB = 13$. titik D pada AB dan titik E pada AC . Jika DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama, maka panjang minimum DE adalah...

B. Uraian

1. Diberikan segitiga ABC . Andaikan P dan P_1 titik-titik pada BC , Q pada CA , dan r pada AB , sedemikian rupa sehingga

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$$

Misalkan G titik berat segitiga ABC dan $K = AP_1 \cap RQ$. Buktikan bahwa titik-titik P, G , dan K kolinier (terletak pada satu garis)

2. Diketahui k adalah bilangan bulat positif terbesar, sehingga dapat ditemukan bilangan bulat positif n , bilangan prima (tidak harus berbeda) $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$, dan bilangan prima berbeda $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ yang memenuhi

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{7 + nq_1q_2 \dots q_k}{2010}$$

tentukan banyaknya n yang memenuhi

3. Tentukan nilai k dan d sehingga tidak ada pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

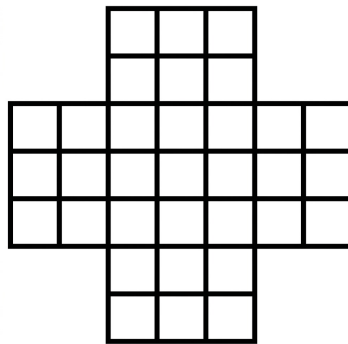
$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 2 \\ y &= kx + d\end{aligned}$$

4. Diketahui n bilangan asli kelipatan 2010. Tunjukkan bahwa persamaan

$$x + 2y + 3z = 2n$$

mempunyai tepat $1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12}$ pasangan solusi (x, y, z) dengan x, y , dan z merupakan bilangan bulat tak negatif

5. Diketahui suatu papan catur seperti pada gambar. Dapatkan suatu biji catur kuda berangkat dari suatu petak melewati petak yang lain hanya satu kali dan kembali ke tempat semula? Jelaskan jawaban anda!



Penjelasan: Langkah catur kuda berbentuk L, yaitu dari kotak asal:

- (a) 2 kotak ke kanan/kiri dan 1 kotak ke depan/belakang; atau
- (b) 2 kotak ke depan/belakang dan 1 kotak ke kanan/kiri