

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2009

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Isian Singkat

1. Tiga dadu berwarna hitam, merah, dan putih dilempar bersama-sama. Macam hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu adalah 8 sebanyak...
2. Banyaknya bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$ adalah...
3. Bilangan rasional $a < b < c$ membentuk barisan hitung (aritmatika) dan $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$. Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah...
4. Misalkan N menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif dan $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{n^{2009} + 2}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}$. Banyaknya himpunan bagian dari S adalah...
5. Diberikan segitiga ABC dengan $\tan \angle CAB = \frac{22}{7}$. Melalui titik sudut A ditarik garis tinggi sedemikian rupa sehingga membagi sisi BC menjadi segmen-segmen dengan panjang 3 dan 17. Luas segitiga ABC adalah...
6. Nilai minimum dari $f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ untuk $0 < x < \pi$ adalah...
7. Diberikan segitiga dengan panjang dari ketiga garis tinggi segitiga itu merupakan bilangan bulat. Jika panjang kedua garis tingginya adalah 10 dan 6, maka panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah...
8. Suatu fungsi $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ mempunyai sifat $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Jika $f(2) = 2$, maka nilai fungsi $f(2009)$ adalah...
9. Diberikan segitiga siku-siku ABC dengan panjang sisi-sisinya adalah a, b , dan c serta $a < b < c$. Misalkan r dan R berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luarnya. Jika $\frac{r(a+b+c)}{R^2} = \sqrt{3}$, maka nilai dari $\frac{r}{a+b+c}$ adalah...
10. Jika $\tan x + \tan y = 25$ dan $\cot x + \cot y = 30$, maka nilai $\tan(x+y)$ adalah...
11. Pada bagian kanan $100!$ terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak...
12. Ada empat pasang sepatu akan diambil empat sepatu secara acak. Peluang bahwa yang terambil ada yang berpasangan adalah...
13. Diketahui k, m , dan n adalah tiga bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{k}{m} + \frac{m}{4n} = \frac{1}{6}$. Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah...

14. Bilangan prima p yang memenuhi $(2p - 1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ ada sebanyak. . .
15. Jika $x_1, x_2, \dots, x_{2009}$ bilangan real, maka nilai terkecil dari
- $$\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \dots + \cos x_{2009} \sin x_1$$
- adalah. . .
16. Misalkan a, b, c adalah akar-akar polinom $x^3 - 8x^2 + 4x - 2$. Jika $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ adalah polinom dengan akar-akar $a + b - c, b + c - a, c + a - b$, maka $f(1) = \dots$
17. Banyaknya segitiga tumpul dengan sisi bilangan asli yang memiliki sisi-sisi terpanjang 10 adalah. . .
(Catatan: dua segitiga kongruen dianggap sama)
18. Misalkan n bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 2009 faktor dari n merupakan kelipatan dari 2009. Faktor prima terkecil dari n adalah. . .
19. Misalkan $p(x) = x^2 - 6$ dan $A = \{x \in \mathbb{R} \mid p(p(x)) = x\}$. Nilai maksimum dari $\{|x| : x \in A\}$ adalah. . .
20. Misalkan $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Nilai $\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$ untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ adalah. . .

B. Uraian

- Seekor semut hendak melangkah ke makanan yang berada sejauh 10 langkah di depannya. Semut tersebut sedang mendapatkan hukuman, ia hanya boleh melangkah ke depan sebanyak kelipatan tiga langkah dan selebihnya harus melangkah ke belakang. Tentukan banyaknya cara melangkah agar bisa mencapai makanan, jika ia harus melangkah tidak lebih dari dua puluh langkah.
(Catatan: Jika semua melangkah dua kali dimana masing-masing melangkah sekali ke belakang, maka dianggap sama saja dengan dua langkah kebelakang)
- Diberikan n adalah bilangan asli. Misalkan $x = 6 + 2009\sqrt{n}$. Jika $\frac{x^{2009} - x}{x^3 - x}$ merupakan bilangan rasional, tunjukkan bahwa n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.
- Diberikan segitiga ABC dan titik D pada sisi AC . Misalkan r_1, r_2 , dan r berturut-turut menyatakan jari-jari lingkaran dalam dari segitiga-segitiga ABD, BCD , dan ABC . Buktikan bahwa $r_1 + r_2 > r$
- Diketahui p adalah bilangan prima sehingga persamaan $7p = 8x^2 - 1$ dan $p^2 = 2y^2 - 1$ mempunyai solusi x dan y berupa bilangan bulat. Tentukan semua nilai p yang memenuhi.
- Diketahui himpunan H mempunyai lima anggota dari $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Buktikan ada dua himpunan bagian dari H , yang tidak kosong dan saling asing, yang jika semua anggotanya dijumlahkan hasilnya sama.