

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2008

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Banyaknya pembagi positif dari 2008 adalah...
2. Cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan ada sebanyak...
3. Jika $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$, maka $\frac{a+b}{a-b} = \dots$
4. Dua dari panjang garis tinggi segitiga ABC lancip, berturut-turut sama dengan 4 dan 12. Jika panjang garis tinggi yang ketiga dari segitiga tersebut merupakan bilangan bulat, maka panjang maksimum garis tinggi segitiga tersebut adalah...
5. Dalam bidang XOY , banyaknya garis yang memotong sumbu X di titik dengan absis bilangan prima dan memotong sumbu Y di titik dengan ordinat bilangan bulat positif serta melalui titik $(4, 3)$ adalah...
6. Diberikan segitiga ABC , AD tegak lurus BC sedemikian rupa sehingga $DC = 2$ dan $BD = 3$. Jika $\angle BAC = 45^\circ$, maka luas segitiga ABC adalah...
7. Jika x dan y bilangan bulat yang memenuhi $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, maka $3x^2y^2 = \dots$
8. Diberikan segitiga ABC , dengan $BC = a$, $AC = b$, dan $\angle C = 606[\circ]$. Jika $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$, maka besarnya $\angle B$ adalah...
9. Seratus siswa suatu Provinsi di Pulau Jawa mengikuti seleksi tingkat Provinsi dan skor rata-ratanya adalah 100. Banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi tersebut 50% lebih banyak dari siswa kelas III, dan skor rata-rata siswa kelas III 50% lebih tinggi dari skor rata-rata siswa kelas II. Skor rata-rata siswa kelas III adalah
10. Diberikan segitiga ABC , dengan $BC = 5$, $AC = 12$, dan $AB = 13$. Titik D dan E berturut-turut pada AB dan AC sedemikian rupa sehingga DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama. Panjang minimum DE adalah...
11. Misalkan a, b, c , dan d bilangan rasional. Jika diketahui persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mempunyai 4 akar real, dua di antaranya adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2008}$. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah...
12. Diberikan segitiga ABC dengan sisi a, b , dan c . Nilai $a^2 + b^2 + c^2$ sama dengan 16 kali luas segitiga ABC . Besarnya nilai $\cot A + \cot B + \cot C$ adalah...

13. Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$. Nilai minimum dari $x + y$ adalah...
14. Banyak bilangan bulat positif n kurang dari 2008 yang mempunyai tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n adalah...
15. Suatu polinom $f(x)$ memenuhi persamaan $f(x^2) - x^3 f(x) = 2(x^3 - 1)$ untuk setiap x bilangan real. Derajat (pangkat tertinggi x) dari $f(x)$ adalah...
16. Anggap satu tahun 365 hari. Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah...
17. Tiga bilangan dipilih secara acak dari $\{1, 2, 3, \dots, 2008\}$. Peluang jumlah ketiganya genap adalah...
18. Misalkan $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X . Jika $|A \cup B| = 10$ dan $|A| = 4$, maka nilai yang mungkin untuk $|B|$ adalah...
19. Diketahui AD adalah garis tinggi dari segitiga ABC , $\angle DAB = \angle ACD$, $AD = 6$, dan $BD = 8$. Luas segitiga ABC adalah...
20. Nilai dari $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k} = \dots$

B. Uraian

1. Carilah semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = 40$$

2. Diberikan polinom real $P(x) = x^{2008} + a_1 x^{2007} + a_2 x^{2006} + \dots + a_{2007} x + a_{2008}$ dan $Q(x) = x^2 + 2x + 2008$. Misalkan persamaan $P(x) = 0$ mempunyai 2008 penyelesaian real dan $P(2008) \leq 1$. Tunjukkan bahwa persamaan $P(Q(x)) = 0$ mempunyai penyelesaian real.
3. Lingkaran dalam dari segitiga ABC , menyinggung sisi-sisi BC , CA , dan AB berturut-turut di D , E , dan F . Melalui D , ditarik garis tegak lurus EF yang memotong EF di G . Buktikan bahwa $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$
4. Bilangan $1, 2, 3, \dots, 9$ disusun melingkar secara acak. Buktikan bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15
5. Tentukan banyaknya bilangan positif 5-angka palindrom yang habis dibagi 3. Palindrom adalah bilangan/kata yang sama jika dibaca dari kiri ke kanan atau sebaliknya. Sebagai contoh 35353 adalah bilangan palindrom sedangkan 14242 bukan.