SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Isian Singkat

1. Misalkan x dan y adalah bilangan real tak nol. Jika $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10$ dan $x + y = 40$, berapakah xy?

2. Sebotoh sirup bisa digunakan untuk membuat 60 gelas minuman jika dilarutkan dalam air dengan perbandingan 1 bagian sirup untuk 4 bagian air. Berapa gelas minimum yang diperoleh dari sebotol sirup jika perbandingan larutan adalah 1 bagian siru untuk 5 bagian air?

3. Penduduk Jawa Tengah adalah 25% dari penduduk pulau Jawa dan 15% dari penduduk Indonesia. Berapa persen penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa?

4. Ketika menghitung volume seluruh tabung, Dina melakukan kesalahan. Ia memasukkan diameter alas ke dalam rumus volume tabung, padahal seharusnya jari-jari alas dimasukkan. Berapa rasio hasil perhitungan Dina terhadap hasil yang seharusnya?

5. Tiga lingkaran melalui pusat koordinat $(0, 0)$. Pusat lingkaran pertama terletak di Kuadran I, pusat lingkaran kedua berada di kuadran II, dan pusat lingkaran ketiga berada pada kuadran III. Jika P adalah sebuah titik yang berada di dalam ketiga lingkaran tersebut, dikuadran manakah titik ini berada?

6. Perhatikan gambar berikut

   Diberikan berturut-turut (dari kiri ke kanan) gambar pertama, kedua dan ketiga dari suatu barisan gambabr. Berapakah banyaknya bulatan hitam pada gambar ke-n?

7. Diberikan segitiga ABC dengan perbandingan panjang sisi $AC : CB = 3 : 4$. Garis bagi sudut luar C memotong perpanjangan BA di P (titik A terletak di antara titik P dan B). Tentukan perbandingan panjang $PA : AB$?

8. Berapakah banyaknya barisan bilangan tak negatif (x, y, z) yang memenuhi persamaan $x + y + z = 99$

9. Tentukan himpunan semua bilangan asli n sehingga $n(n-1)(2n-1)$ habis dibagi 6

10. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^2 <| 2x - 8 |$

11. Di antara 6 buah kartu bernomor 1 sampai 6 diambil dua kartu secara acak. Berapa peluang terambilnya dua kartu yang jumlah nomornya adalah 6?

12. Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5, berapakah luas trapesium tersebut?

13. Tentukan nilai dari $\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{7}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{2005}\right)$

14. Santi dan Tini berlari sepanjang sebuah lintasan yang berbentuk lingkaran. Keduanya mulai berlari pada saat yang sama dari titik P, tetapi mengambil arah berlawanan. Santi berlari $1\frac{1}{2}$ kali lebih cepat daripada Tini. Jika PQ adalah garis tengah lingkaran lintasan dan keduanya berpapasan untuk pertama kalinya di titik R, berapa derajatkah berat $\angle RPQ$?

15. Pada sisi-sisi SU, TS, dan UT dari ΔSTU dipilih titik-titik P, Q, dan R berturut-turut sehingga $SP = \frac{1}{4}SU, TQ = \frac{1}{2}TS$, dan $UR = \frac{1}{3}UT$. Jika luas segitiga STU adalah 1, berapakah luas segitiga PQR?

16. Dua bilangan real x, y memenuhi $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1$. Berapakah nilai $x + y$

17. Berapa banyak minimal titik yang harus diambil dari sebuah persegi dengan panjang sisi 2, agar dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya tidak lebih dari $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

18. Misalkan $FPB(a, b)$ menyatakan *Faktor Persekutuan Terbesar* dari bilangan bulat a dan b. Tiga bilangan asli $a_1 < a_2 < a_3$ memenuhi $FPB(a_1, a_2, a_3) = 1$, tetapi $FPB(a_i, a_j) > 1$ jika $i \neq j$, dengan $i, j = 1, 2, 3$. Tentukan (a_1, a_2, a_3) agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal

19. Didefinisikan $a \circ b = a + b + ab$, untuk semua bilangan bulat a, b. Kita katakan bahwa bilangan bulat a adalah faktor dari bialngan bulat c bilaman terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $a \circ b = c$. Tentukan semua faktor positif dari 67

B. Uraian

1. Tentukan semua (x, y, z), dengan x, y, z bilangan-bilangan real, yang memenhi sekaligus ketiga persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= y^3 + 4x - z^3 \\ y^2 + 4 &= z^3 + 4y - x^3 \\ z^2 + 4 &= x^3 + 4z - y^3 \end{aligned}$$

2. Pada segitiga ABC diberikan titik-titik D, E, dan F yang terletak berturut-turut pada sisi BC, CA, dan AB sehingga garis-garis AD, BE, dan CF berpotongan di titik O. Buktikan bahwa $\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$

3. Beni, Coki, dan Doni tinggal serumah dan belajar di sekolah yang sama. Setiap pagi ketiganya berangkat pada saat yang sama. untuk sampai ke sekolah Beni memerlukan waktu 2 menit, Coki memerlukan waktu 4 menit, sedangkan Doni memerlukan waktu 8 menit. Selain itu tersedia sebuah sepeda yang hanya dapat dinaiki satu orang. Dengan sepeda, setiap orang memerluakan waktu hanya 1 menit. Tunjukkan bahwa adalah mungkin bagi ketiganya untuk sampai ke sekolah dalam waktu tidak lebih dari $2\frac{3}{4}$ menit

4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$

5. *Titik letis* pada bidang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa pasangan bilangan bulat. Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima *titik letis* berbeda pada bidang. Buktikan bahwa terdapat sepasang *titik letis* $(P_i, P_j), i \neq j$, demikian sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah *titik letis* selain P_i dan P_j