

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Isian Singkat

1. Misalkan $A = (-1)^{-1}$, $B = (-1)^1$ dan $C = 1^{-1}$. Berapakah $A + B + C$?
2. Jika $y = \frac{x-1}{2x+3}$, tuliskan x sebagai fungsi dari y
3. Misalkan $S = (x - 2)^4 + 8(x - 2)^3 + 24(x - 2)^2 + 32(x - 2) + 16$. Apakah S jika dituliskan dalam sesedikit mungkin suku penjumlahan?
4. Bilangan real $2,525252\cdots$ adalah bilangan rasional, sehingga dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dimana m, n bilangan-bilangan bulat, $n \neq 0$. Jika dipilih m dan n yang relatif prima, berapakah $m + n$?
5. Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari $M - m$?
6. Tinjau persamaan yang berbentuk $x^2 + bx + c = 0$. Berapa banyakkah persamaan demikian yang memiliki akar-akar real jika koefisien b dan c hanya boleh dipilih dari himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
7. Diketahui tiga bilangan k, m , dan n . Pernyataan "Jika $k \geq m$, maka $k > n$ " adalah tidak benar. Apakah pernyataan yang benar dalam hal ini?
8. Sebuah saluran air seharusnya dibuat dengan menggunakan pipa berdiameter 10 cm. Akan tetapi yang tersedia hanyalah pipa-pipa kecil yang berdiameter 3 cm. Supaya kapasitas saluran tidak lebih kecil daripada yang diinginkan, berapakah banyaknya pipa 3 cm yang perlu dipakai sebagai pengganti satu pipa 10 cm?
9. Sebuah segitiga samasisi, sebuah lingkaran dan sebuah persegi memiliki keliling yang sama. Di antara ketiga bangun tersebut, manakah yang memiliki luas terbesar?
10. Segitiga ABC memiliki panjang sisi $AB = 10$, $BC = 7$, dan $CA = 12$. Jika setiap sisi diperpanjang menjadi tiga kali panjang semula, maka segitiga yang terbentuk memiliki luas berapa kali luas $\triangle ABC$
11. Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikut ketentuan berikut:
 - Setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi, DAN
 - setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama.

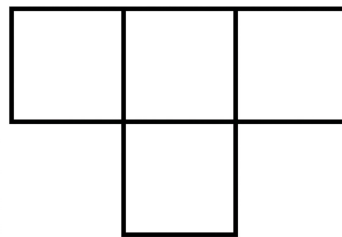
Berapakah n ?

12. Didefinisikan $a*b = a+b+ab$, untuk semua bilangan real a, b . Jika $S = \{a \text{ bilangan real } a*(-a) > 1\}$, tuliskan S sebagai sebuah selang (interval)
13. Garis tengah sebuah setengah lingkaran berimpit dengan alas AB dari $\triangle ABC$. Titik sudut C bergerak sedemikian rupa, sehingga titik tengah sisi AC selalu terletak pada setengah lingkaran. Berapa apakah lengkungan tempat kedudukan titik C ?
14. Berapakah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan $1^5 - 1, 2^5 - 2, \dots, n^5 - n, \dots$?
15. Jika $2002 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \dots + a_n \cdot n!$, dimana a_k adalah bilangan bulat, $0 \leq a_k \leq k, k = 1, 2, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$, tentukan pasangan terurut (n, a_n)
16. Berapakah sisa pembagian 43^{43} oleh 100?
17. Empat pasang suami istri membeli karcis untuk 8 kursi sebaris pada suatu pertunjukan. Dua orang akan duduk bersebelahan hanya kalau keduanya pasangan suami isteri atau berjenis kelamin sama. Berapa banyakkah cara menempati keempat pasang suami-isteri ke 8 kursi tersebut?
18. Ada berapa banyakkah bilangan 4-angka berbentuk \overline{abcd} dengan $a \leq b \leq c \leq d$?
19. Kita gambarkan segibanyak beraturan (reguler) R dengan 2002 titik sudut beserta semua diagonalnya. Berapakah banyaknya segitiga yang terbentuk yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R , tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R ?
20. Suatu lomba maraton diikuti oleh empat SMU: Merak, Merpati, Pipit dan Walet. Setiap SMU mengirimkan lima pelari. Pelari yang masuk finish ke-1, 2, 3, 4, 5, 6 memperoleh nilai berturut-turut 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai setiap SMU adalah jumlah nilai kelima pelarinya. SMU dengan nilai terbesar adalah juara lomba. Di akhir lomba ternyata SMU Pipit menjadi juara dan tidak ada dua pelari yang finish bersamaan. Ada berapa banyakkah kemungkinan nilai SMU pemenang?

B. Uraian

1. Lima buah bilangan asli berbeda, k, l, m, n , dan p , akan dipilih. Kelima informasi berikut ternyata cukup untuk mengurutkan kelima bilangan tersebut:
 - (a) di antara setiap dua bilangan, salah satu bilangan mesti membagi bilangan yang lainnya,
 - (b) m adalah bilangan yang terbesar atau yang terkecil
 - (c) p tidak boleh membagi sekaligus m dan k
 - (d) $n \leq l - p$, dan
 - (e) k membagi n atau p membagi n , tetapi tidak sekaligus keduanya.

- Tentukan urutan yang mungkin bagi k, l, m, n , dan p
2. Tentukan semua bilangan bulat positif p sehingga $\frac{3p+25}{2p-5}$ juga bulat positif
 3. Diberikan sebuah bilangan 6-angka. Buktikan bahwa keenam angka tersebut dapat disusun ulang sedemikian rupa, sehingga jumlah tiga bilangan pertama dan jumlah tiga angka terakhir berselisih tidak lebih dari 9
 4. Diberikan segitiga sama ABC dan sebuah titik P sehingga jarak P ke A dan C tidak lebih jauh dari jarak ke P ke B . Buktikan bahwa $PB = PA + PC$ jika dan hanya jika P terletak pada lingkaran luar $\triangle ABC$.
 5. Bangun datar pada gambar disebut *tetramino-T*. Misalkan setiap petak *tetramino* menutupi tepat satu petak pada papan catur. Kita ingin menutup papan catur dengan *tetramino-tetramino* sehingga setiap petak *tetramino* menutupi satu petak catur tanpa tumpang tindih.



tetramino-T

- (a) Tunjukkan bahwa kita dapat menutup papan catur biasa, yaitu papan catur dengan 8×8 petak, dengan menggunakan 16 *tetramino-T*
- (b) Tunjukkan bahwa kita tidak dapat menutup papan catur 10×10 petak dengan 25 *tetramino-T*