

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2023

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Diberikan segitiga lancip ABC dengan sisi terpanjang BC . Titik D, E berturut-turut pada AC, AB sehingga $BA = BD$ dan $CA = CE$. Titik A' merupakan pencerminan A terhadap garis BC . Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga ABC dan $A'DE$ mempunyai panjang jari-jari yang sama.
2. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan real x, y berlaku

$$f(f(x) + y) = \lfloor x + f(f(y)) \rfloor$$

Catatan: $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x .

3. Sebuah bilangan asli n tertulis di papan. Pada setiap langkah, Neneng dan Asep mengubah angka di papan dengan peraturan sebagai berikut: Misalkan angka di papan adalah X . Awalnya, Neneng memilih tanda naik atau turun. Kemudian, Asep memilih suatu pembagi positif d dan X , dan mengganti X dengan $X + d$ jika Neneng naik, atau $X - d$ jika Neneng memilih turun. Prosedur ini dilakukan secara berulang. Asep menang jika bilangan di papan merupakan suatu bilangan kuadrat sempurna tak nol, dan kalah jika di suatu saat ia menuliskan angka nol. Buktikan jika $n \geq 14$, Asep dapat menang dalam paling banyak $\frac{n-5}{4}$ langkah.
4. Tentukan ada atau tidak bilangan asli N yang memenuhi tiga syarat berikut:
 - N habis dibagi 2^{2023} , tapi tidak habis dibagi 2^{2024}
 - N hanya memuat tiga digit berbeda, dan N tidak memiliki digit nol,
 - Tepat 99,9% digit N merupakan bilangan ganjil.

B. Hari Kedua

5. Misalkan a, b bilangan asli sehingga $FPB(a, b) + KPK(a, b)$ merupakan kelipatan $a + 1$. Jika $b \leq a$, buktikan bahwa b merupakan bilangan kuadrat sempurna.
Catatan: $FPB(a, b)$ dan $KPK(a, b)$ berturut-turut menyatakan faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b
6. Tentukan banyaknya permutasi a_1, a_2, \dots, a_n dari $1, 2, \dots, n$ sehingga untuk setiap bilangan asli k dengan $1 \leq k \leq n$, terdapat bilangan bulat r dengan $0 \leq r \leq n - k$ yang memenuhi

$$1 + 2 + \dots + k = a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_{r+k}$$

7. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ACB = 90^\circ$. Misalkan ω lingkaran luar ABC . Garis singgung terhadap ω di titik B dan C bertemu di P . Misalkan M titik tengah PB . Garis CM memotong ω di N dan garis PN memotong AB di E . Titik D pada CM sehingga $ED \parallel BM$. Buktikan bahwa lingkaran luar CDE menyinggung ω .
8. Diberikan tiga bilangan bulat positif berbeda a, b, c . Definisikan $S(a, b, c)$ sebagai himpunan semua akar rasional dari $px^2 + qx + r = 0$ untuk semua (p, q, r) yang merupakan permutasi dari (a, b, c) . Sebagai contoh, $S(1, 2, 3) = \{-1, -2, -\frac{1}{2}\}$ karena persamaan $x^2 + 3x + 2 = 0$ memiliki akar-akar -1 dan -2 , persamaan $2x^2 + 3x + 1 = 0$ memiliki akar -1 dan $-\frac{1}{2}$, sedangkan untuk permutasi yang lainnya persamaan kuadrat yang terbentuk tidak memiliki akar rasional. Tentukan maksimum banyaknya elemen di $S(a, b, c)$.