

# SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2021

Diketik ulang oleh: muha.com

## A. Hari Pertama

1. Pada papan tulis tertulis secara berurutan angka-angka berikut:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9$$

Andi harus menempatkan tanda + atau - di antara setiap dua angka yang berurutan dan menghitung nilai dari ekspresi yang dihasilkan. Sebagai contoh, Andi bisa menempatkan tanda + dan - sebagai berikut:

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 - 9 = 5$$

Tentukan bilangan positif ganjil terkecil yang *tidak mungkin* bisa diperoleh oleh Andi.

2. Diberikan segitiga lancip  $ABC$ . Titik  $D$  dan  $E$  berturut-turut merupakan titik tengah segmen  $AB$  dan  $AC$ . Misalkan  $L_1$  dan  $L_2$  berturut-turut lingkaran luar segitiga  $ABC$  dan  $ADE$ . Garis  $CD$  memotong lingkaran  $L_1$  dan  $L_2$  pada  $M$  ( $M \neq C$ ) dan  $N$  ( $N \neq D$ ). Jika  $DM = DN$ , buktikan bahwa  $ABC$  segitiga sama kaki.
3. Sebuah bilangan asli disebut *prima berpangkat* jika bilangan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk  $p^k$ , dengan  $p$  prima dan  $k$  bilangan bulat positif. Tentukan nilai  $n$  terbesar yang mungkin sehingga ada barisan bilangan *prima berpangkat*  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dengan  $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$  untuk semua  $3 \leq i \leq n$ .
4. Misalkan  $x, y, z$  bilangan real positif dengan  $x + y + z = 3$ . Buktikan

$$2\sqrt{x + \sqrt{y}} + 2\sqrt{y + \sqrt{z}} + \sqrt{z + \sqrt{x}} \leq \sqrt{8 + x - y} + \sqrt{8 + y - z} + \sqrt{8 + z - x}$$

## B. Hari Kedua

5. Misalkan  $P(x) = x^2 + rx + s$  polinomial dengan koefisien real. Diketahui  $P(x)$  mempunyai dua akar real berbeda yang keduanya kurang dari  $-1$  dan selisih akarnya kurang dari  $2$ . Buktikan bahwa  $P(P(x)) > 0$  untuk setiap bilangan real  $x$ .
6. Di papan tulis dituliskan  $n$  bilangan asli. Pada setiap langkah kita dapat menghapus dua bilangan  $a$  dan  $b$  dan menggantinya dengan  $FPB(a, b)$  dan  $KPK(a, b) - FPB(a, b)$ . Buktikan semua bilangan dapat dibuat sama sebanyak berhingga langkah.
7. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan lingkaran luar  $l$ . Titik  $M$  berada di dalam segitiga  $ABC$  sehingga  $AM$  garis bagi  $\angle BAC$ . Lingkaran dengan jari-jari  $MB$  dan pusat  $M$  memotong  $l$  dan  $BC$  berturut-turut di  $D$  dan  $E$  ( $B \neq D$  dan  $B \neq E$ ). Buktikan  $AP$  garis bagi  $\angle DPE$  jika dan hanya jika  $\angle B = 90^\circ$ .

8. Di sebuah papan catur berukuran  $100 \times 100$ , rencananya akan diletakkan papan-papan kecil berukuran  $1 \times 3$  dan  $3 \times 1$  sehingga:
- Setiap petak papan catur besar tertutup oleh paling banyak satu papan kecil.
  - Keseluruhan papan-papan kecil menutupi seluruh petak besar, kecuali satu buah petak
  - Sisi-sisi papan kecil diletakkan sejajar dengan petak-petak papan besar.

Misalkan untuk melakukan instruksi di atas, dibutuhkan  $H$  papan berukuran  $1 \times 3$  dan  $V$  papan berukuran  $3 \times 1$ . Tentukan semua pasang  $(H, V)$  yang mungkin.