

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIOANAL TAHUN 2020

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Hari Pertama

1. Diberikan segitiga lancip ABC dan titik D pada segmen BC . Lingkaran c_1 adalah lingkaran yang melalui A, D dan memiliki titik pusat pada garis AC , sedangkan c_2 adalah lingkaran yang melalui A, D , dan memiliki titik pusat pada garis AB . Misalkan $P \neq A$ adalah titik potong lingkaran c_1 dengan AB dan $Q \neq A$ adalah titik potong lingkaran c_2 dengan AC . Buktikan bahwa AD garis bagi $\angle PDC$
2. Misalkan $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c real. Jika $P(a) = bc, P(b) = ca, P(c) = ab$. Buktikan bahwa $(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c) = 0$.
3. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga $n^2 + f(n)f(m)$ merupakan kelipatan $f(n) + m$ untuk setiap bilangan asli n, m
4. Diberikan papan catur berukuran $2n \times 2n$ yang setiap petaknya diwarnai dengan salah satu dari n warna. Buktikan bahwa terdapat dua petak yang terletak di dalam kolom yang sama atau baris yang sama, sehingga jika pewarnaan kedua petak tersebut ditukar, maka terdapat persegi panjang yang keempat petak pada semua sudutnya memiliki warna yang sama.

B. Hari Kedua

5. Suatu himpunan A memuat tepat n bilangan bulat yang masing-masing lebih besar dari 1 dan setiap faktor primanya kurang dari 10. Tentukan n terkecil sehingga A pasti memuat dua anggota berbeda a dan b dengan ab adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.
6. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan X titik pada sisi BC ($X \neq C$) sehingga garis AX tegak lurus dengan garis bagi $\angle CBD$, dan Y titik pada sisi AD ($Y \neq D$) sehingga BY tegak lurus dengan garis bagi $\angle CAD$. Buktikan bahwa XY sejajar dengan CD
7. Tentukan semua polinomial dengan koefisien bilangan real $P(x)$ yang memenuhi $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ untuk setiap bilangan real x
8. Tentukan bilangan asli terkecil $n > 2$, atau buktikan bahwa tidak ada bilangan asli n yang memenuhi sifat berikut:
Terdapat bilangan asli a_1, a_2, \dots, a_n sehingga

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\gcd(a_k, a_{k+1})} + \frac{1}{\gcd(a_k, a_{k+2})} + \dots + \frac{1}{\gcd(a_k, a_n)} \right)}_{n-k \text{ suku}}$$

Catata: $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ adalah faktor persekutuan terbesar dari a_1, a_2, \dots, a_n

muhacode.com