

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2019

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Diberikan n dan r bilangan asli yang memenuhi

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r)$$

Buktikan bahwa n bilangan komposit

2. Diberikan 200 kotak merah yang masing-masing berisi maksimal 19 bola dan minimal 1 bola dan 19 kotak biru yang masing-masing berisi maksimal 200 bola dan minimal 1 bola. Diketahui banyak bola pada kotak biru kurang dari banyak bola pada kotak merah. Buktikan ada sekelompok kotak merah yang jumlah bolanya sama dengan sekelompok kotak biru.
3. Diberikan sebuah persegi panjang $ABCD$ dengan $AD > AB$. Titik E pada AD sehingga BE tegak lurus AC , BE memotong AC di M . Lingkaran luar segitiga BEA memotong AC dan BC berturut-turut di N dan F . Lingkaran luar segitiga EDN memotong CD di G . Jika garis FG memotong AB di P , buktikan bahwa $PM = PN$
4. Katakan sebuah susunan kesatuan sebagai susunan *kesatuan segitiga* apabila dapat dibuat:

$$\begin{aligned} a + b &= c \\ d + e + f &= gh \\ i + j + k + l &= m + n + o \end{aligned}$$

Dimana ruas kiri baris ke- j terdiri dari $j + 1$ suku dan ruas kanan baris ke- j terdiri dari j suku. Diberikan bilangan dari $1, 2, \dots, N^2$ dengan sebarang satu bilangan yang paritas sama dengan N dihapus. Buktikan bilangan yang tersisa dapat dibentuk suatu *kesatuan segitiga*

B. Hari Kedua

5. Diberikan bilangan real a dan b sehingga ada tak hingga banyak bilangan asli m dan n yang memenuhi

$$\lfloor am + b \rfloor \leq \lfloor a + bm \rfloor \text{ dan } \lfloor an + b \rfloor \geq \lfloor a + bn \rfloor$$

Buktikan bahwa $a = b$

6. Diberikan lingkaran dengan pusat O . Titik A di dalam lingkaran namun tidak pada keliling lingkaran. Titik B merupakan refleksi A terhadap O . Sebarang titik P terletak pada keliling lingkaran. Garis yang tegak lurus AP dan melewati P memotong lingkaran di Q . Buktikan $AP \times BQ$ konstan selama P bergerak di lingkaran.
7. Tentukan semua solusi dari x, y, m, n bilangan asli dan p prima yang memenuhi

$$\begin{aligned}x + y^2 &= p^m \\x^2 + y &= p^n\end{aligned}$$

8. Diberikan $n > 1$ dan a_i bilangan bulat pada rentang $[-n, n]$. Apabila $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = n + 1$, buktikan ada sekelompok a_i yang jumlahnya 0