SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT NASIOANAL TAHUN 2018

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Hari Pertama

1. Misalkan a adalah bilangan bulat positif sehingga

$$FPB(an+1, 2n+1) = 1$$

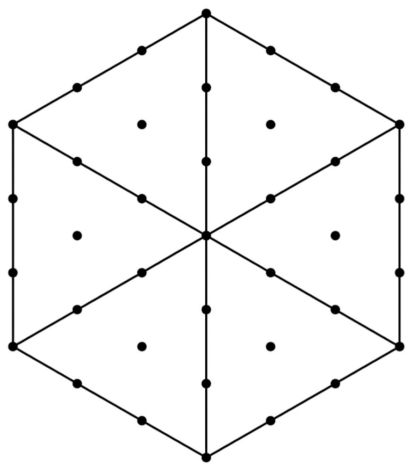
untuk setiap bilangan bulat n

   (a) Tunjukkan bahwa $FPB(a-2, 2a+1) = 1$ untuk setiap bilangan bulat n

   (b) Cari semua a yang mungkin

2. Misalkan Γ_1 dan Γ_2 dua lingkaran yang bersinggungan di titik A dengan Γ_2 di dalam Γ_1. Misalkan E titik pada Γ_2 dan garis AB memotong Γ_1 di titik C. Misalkan D titik pada Γ_1 dan P sebarang titik pada garis CD (boleh pada perpanjangan segmen CD). Garis BP memotong Γ_2 di titik Q. Tunjukkan bahwa A, D, P, Q terletak pada satu lingkaran.

3. Alzim dan Badril bermain pada papan berbentuk segienam beraturan dengan 37 titik seperti pada gambar berikut.



Pada setiap gilirannya, Alzim mewarnai satu titik yang belum berwarna dengan warna merah, sedangkan Badril mewarnai dua titik yang belum berwarna dengan biru. Permainan akan berakhir saat terdapat segitiga sama sisi merah (segitiga sama sisi dengan ketiga titik sudutnya merah) atau saat semua titik sudah terwarnai. Alzim akan menang jika terdapat segitiga sama sisi merah, sedangkan Badril akan menang jika tidak ada segitiga sama sisi merah saat permainan berakhir. Jika Alzim melangkah terlebih dahulu, apakah Alzim mempunyai strategi untuk menang?

4. Pada suatu permainan Andi dan komputer melangkah secara bergantian. Awalnya komputer menampilkan suatu polinom $x^2 + mx + n$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$ yang tidak memiliki akar real. Andi kemudian memulai permainan tersebut. Pada setiap giliran, Andi mengganti polinom $x^2 + ax + b$ yang muncul di layar dengan salah satu dari $x^2 + (a + b)x + b$ atau $x^2 + ax + (a + b)$. Andi hanya boleh memilih polinom pengganti yang akar-akarnya real. Sedangkan komputer pada setiap gilirannya menukar koefisien x dan konstanta dari polinom yang dipilih Andi. Andi akan kalah jika dia tidak bisa melakukan langkahnya. Tentukan semua pasangan (m, n) agar Andi pasti kalah.

B. Hari Kedua

5. Cari semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\min\{x, y\} + \frac{2}{3}\max\{x, y\} &= 2017 \\
\frac{1}{3}\min\{y, z\} + \frac{2}{3}\max\{y, z\} &= 2018 \\
\frac{1}{3}\min\{z, x\} + \frac{2}{3}\max\{z, x\} &= 2019
\end{aligned}$$

6. Tentukan semua bilangan prima p sehingga terdapat bilangan bulat positif n yang mengakibatkan $2^n p^2 + 1$ merupakan bilangan kuadrat.

7. Diberikan tiga ember kosong dan n kelereng dengan $n \geq 3$. Ani dan Budi memainkan suatu permainan. Mula-mula. Ani membagi n kelereng ke semua ember sehingga setiap ember mendapat paling sedikti satu kelereng. Kemudian Budi menjalankan giliran pertama dan bergantian seterusnya bergantian dengan Ani. Pada gilirannya seorang pemain boleh mengambil 1, 2, atau 3 kelereng hanya dari satu ember. Pemain yang mengambil kelereng terakhir menang. Tentukan semua nilai n sehingga Ani memiliki strategi menang (termasuk cara membagi kelereng di awal permainan sehingga Budi tidak mungkin menang)

8. Misalkan I dan O masing-masing menyatakan titik pusat lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga ABC. Lingkaran singgung luar ω_A dari segitiga ABC menyinggung sisi BC di N serta menyinggung perpanjangan sisi AB dan BC masing-masing di K dan M. Jika titik tengah dari ruas garis KM berada pada lingkaran luar segitiga ABC, buktikan bahwa O, I dan N segaris.