

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2015

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

- Albert, Bernard, dan Cheryl sedang bermain kelereng. Di awal permainan masing-masing membawa 5 kelereng merah, 7 kelereng hijau, dan 13 kelereng biru, sedangkan di kotak kelereng ada tak berhingga banyaknya kelereng. Pada satu langkah setiap anak diberi kebebasan membuat dua kelereng yang berbeda warna, kemudian menggantinya dengan dua kelereng dengan warna ketiga. Sebagai contoh, satu kelereng hijau dan satu kelereng merah dibuah, kemudian dua kelereng biru diambil dari kotak. Setelah serangkaian langkah (banyak langkah yang dilakukan masing-masing anak boleh berbeda) terjadilah percakapan berikut

Albert: "Saya hanya membawa kelereng berwarna merah"

Bernard: "Saya hanya membawah kelereng berwarna biru"

Cheryl: "Saya hanya membawah kelereng berwarna hijau"

Siapa sajakah yang pasti berkata bohong?

- Untuk setiap bilangan asli a, b notasikan dengan $[a, b]$ kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b dan notasikan dengan (a, b) faktor persekutuan terbesar dari a dan b . Tentukan semua bilangan asli n sehingga

$$4 \sum_{k=1}^n [n, k] = 1 + \sum_{k=1}^n (n, k) + 2n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n, k)}$$

- Diberikan segitiga lancip ABC . Lingkaran Γ_B dengan pusat O_B adalah lingkaran yang melalui titik A dan B , serta menyinggung AC di titik A dengan cara yang sama didefinisikan lingkaran Γ_C dengan pusat O_C . Misalkan garis tinggi segitiga ABC melalui B dan C , berturut-turut memotong lingkaran luar ABC di titik X dan Y . Buktikan bahwa titik A , titik tengah segmen XY , dan titik tengah segmen $O_B O_C$, ketiganya terletak pada satu titik garis lurus.

- Misalkan pasangan fungsi $f, g : R^+ \rightarrow R^+$ memenuhi persamaan fungsi

$$f(g(x)y + f(y)) = (y + 2025)f(x)$$

untuk setiap $x, y \in R^+$

- Buktikan bahwa $g(x) = \frac{f(x)}{2015}$ untuk setiap $x \in R^+$
- Berikan contoh pasngan fungsi yang memenuhi persamaan di atas dan $f(x), g(x) \geq 1$ untuk setiap $x \in R^+$

B. Hari Kedua

5. Misalkan a, b, c, d adalah bilangan asli sehingga $a|c^d$ dan $b|d^c$. Buktikan bahwa $ab|(cd)^{\max\{a,b\}}$.

Catatan: $\max\{a, b\}$ menyatakan nilai terbesar dari a atau b

6. Diberikan segitiga lancip ABC dengan pusat lingkaran luar O . Garis AO memotong lingkaran luar segitiga $ABCD$ di titik D . Misalkan P titik pada sisi BC . Garis melalui P tegak lurus AP memotong garis DB dan DC berturut-turut di E dan F . Garis melalui D tegak lurus BC memotong EF di titik Q . Buktikan bahwa $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = CP$

7. Misalkan a, b, c bilangan real positif. Buktikan ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c}} \geq 3$$

8. Diketahui ada 3 gedung berbetuk sama yang lokasinya membentuk segitiga sama sisi. Masing-masing gedung memiliki 2015 lantai dengan setiap lantainya tepat memiliki 1 jendela. Pada ketiga gedung, setiap lantai 1 tidak berpenghuni, sedangkan masing-masing lantai yang lain mempunyai tepat satu penghuni.

Semua jendela akan diwarnai dengan salah satu warna dari warna merah, hijau, atau biru. Sang penghuni masing-masing lantai pada suatu gedung dapat melihat warna jendela pada kedua gedung yang lain untuk lain yang sama dan satu lantai tepat dibawahnya, tetapi dia tidak bisa melihat warna jendela dari lantai manapun pada gedungnya sendiri. Sebagai contoh, penghuni lantai 10 dapat melihat warna jendela lantai 9 dan 10 untuk kedua gedung yang lain (total 4 jendela) dan dia tidak dapat melihat warna jendela lainnya.

Kita ingin mewarnai jendela-jendela tersebut agar setiap penghuni dapat melihat paling sedikit 1 jendela dari setiap warnanya. Ada berapa cara mewarnai jendela-jendela tersebut?