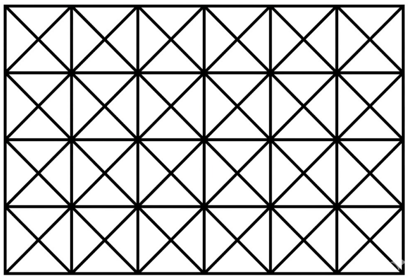
SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA
TINGKAT NASIOANAL TAHUN 2013

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Hari Pertama

1. Diketahui bangung persegi panjang berukuran 4×6 dengan beberapa ruas garis, seperti pada gambar.



Dengan menggunakan ruas garis yang sudah, tentukan banyak jajar genjang tanpa sudut siku-siku pada gambar tersebut.

2. Diberikan segitiga lancip ABC dengan lingkan luar ω. Garis bagi $\angle BAC$ memotong ω di titik M. Misalkan P suatu titik pada garsi AM dengan P di dalam segitiga ABC. Garis melalui P yang sejajar AB dan garis melalui P yang sejajar AC memotong sisi BC berturut-turut di E dan F. Garis ME dan MF memotong ω lagi berturut-turut di titik Kk dan L. Buktikan bahwa garis-gariS AM, BL, dan CK kongruen

3. Tentuka semua bilangan real positif M sedemikian sehingga untuk sebarang bilangan real positif a, b, dan c, paling sedikit satu di antara tiga bilangan berikut.
$$a + \frac{M}{ab}, b + \frac{M}{bc}, c + \frac{M}{ca}$$
bernilai lebih dari atau sama dnegan $1 + M$

4. Misalkan $p > 3$ adalah bilangan prima dan
$$S = \sum_{2 \le i < j < k \le p-1} ijk$$
Buktikan bahwa bilangan $S + 1$ habis dibagi p

B. Hari Kedua

5. Diberikan sebarang polinom kuadrat $P(x)$ dengan koefisien utama positif dan diskriminan negatif. Buktikan bahwa $P(x)$ dapat dinyatakan sebagai jumlah tiga polinom kuadrat.
$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$$

dengan $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ memiliki koefisien utama positif dan diskriminan nol serta akar (real kembar) dari ketiga polinom tersebut berbeda.

6. Suatu bilangan asli n dikatakan kuat apabila terdapat bilangan asli x sehingga $x^{nx} + 1$ habis dibagi 2^n
   (a) Buktikan bahwa 2013 merupakan bilangan kuat
   (b) Jika m bilangan kuat, tentukan bilangan asli terkecil y sehingga $y^{my} + 1$ habis dibagi 2^m

7. Diberikan jajar genjang $ABCD$. Pada sisi luar jajar genjang, dikonstruksi persegi-persegi $ABC_1D_1, BCD_2A_2, CDA_3B_3$, dan DAB_4C_4. Pada sisi-sisi luar B_4D_1, C_1A_2, D_2B_3, dan A_3C_4 dari segitiga-segitiga $AB_4D_1, BC_1A_2, CD_2B_3$, dan DA_3C_4. Konstruksi persegi-persegi lagi dengan pusat berturut-turut O_A, O_B, O_C, dan O_D. Buktikan bahwa $AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$

8. Misalkan A suatu himpunan berhingga beranggotakan bilangan asli. Tinjau himpunan-himpunan bagian dari A dengan tiga anggota. Himpunan A dikatakan seimbang apabila banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut habis dibagi 3 sama dengan banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut tidak habis dibagi 3.
   (a) Berikan satu contoh himpunan seimbang dengan 9 anggota
   (b) Buktikan bahwa tidak ada himpunan seimbang dengan 2013 anggota.