

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2012

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli a dan b , bilangan

$$n = FPB(a, b) + KPK(a, b) - a - b$$

adalah bilangan bulat genap tak negatif

2. Diberikan bilangan asli n dan bilangan-bilangan real positif a_1, a_2, \dots, a_n . Buktikan bahwa

$$(1 + a_1)^2(1 + a_2)^3 \cdots (1 + a_n)^{n+1} \geq (n + 1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku

3. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB > AC$ dan memiliki titik pusat lingkaran luar O . Garis BO dan CO memotong garis bagi $\angle BAC$ berturut-turut di titik P dan Q . Selanjutnya garis BQ dan CP berpotongan di titik R . Buktikan bahwa garis AR tegak lurus terhadap garis BC .

4. Diberikan 2012 titik berbeda $A_1, A_2, \dots, A_{2012}$ di bidang Cartesius. Untuk sebarang permutasi $B_1, B_2, \dots, B_{2012}$ dari $A_1, A_2, \dots, A_{2012}$ didefinisikan bayangan dari titik P terhadap permutasi tersebut sebagai berikut:

- Titik P dirotasikan 180° dengan pusat B_1 menghasilkan P_1
- Titik P_1 dirotasikan 180° dengan pusat B_2 menghasilkan P_2
- ...
- ...
- ...
- Titik P_{2011} dirotasikan 180° dengan pusat B_{2012} menghasilkan P_{2012}

Selanjutnya titik P_{2012} dikatakan sebagai bayangan dari titik P terhadap permutasi $B_1, B_2, \dots, B_{2012}$. Misalkan N adalah banyaknya bayangan titik P yang berbeda terhadap semua permutasi dari $A_1, A_2, \dots, A_{2012}$. Tentukan nilai terbesar yang mungkin bagi N .

B. Hari Kedua

5. Diberikan bilangan asli m dan n . Misalkan P dan Q adalah dua kumpulan $m \times n$ bilangan 0 dan 1 yang disusun dalam m baris dan n kolom. Contoh salah satu kumpulan itu untuk $m = 3$ dan $n = 4$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan kedua kumpulan tersebut memenuhi empat sifat berikut.

- i. Pada setiap baris P , bilangan dari kiri ke kanan tidak pernah naik (boleh sama atau turun).
- ii. Pada setiap kolom di P , bilangan dari atas ke bawah tidak pernah naik (boleh sama atau turun).
- iii. Jumlah bilangan pada sebarang baris di P sama dengan jumlah bilangan pada baris yang sama di Q , dan
- iv. Jumlah bilangan pada sebarang kolom di P sama dengan jumlah bilangan pada kolom yang sama di Q

Tunjukkan bahwa bilangan pada baris ke- i kolom ke- j di P sama dengan biangan pada baris ke- i kolom ke- j di Q untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

6. Misalkan R^+ menyatakan himpunan semua bilangan real positif. Tunjukkan bahwa tidak ada fungsi $f : R^+ \rightarrow R^+$ yang memenuhi

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \frac{1}{2012}$$

untuk setiap bilangan real positif x dan y

7. Misalkan n bilangan asli. Buktikan bahwa persamaan

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$$

memiliki solusi pasangan biangan asli (x, y) jika dan hanya jika n habis dibagi oleh suatu bilangan kuadrat yang lebih besar daripada 1.

8. Diberikan sebarang segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC dan lingkaran luar segitiga ABC berturut-turut di D dan E . Misalkan M dan N berturut-turut titik tengah BD dan CE . Lingkaran luar segitiga ABD memotong di AN di titik Q . Lingkaran yang melalui A dan menyinggung BC di D memotong garis AM dan sisi AC berturut-turut di titik P dan R . Tunjukkan bahwa empat titik B, P, Q, R terletak pada satu garis.