

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2011

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Untuk suatu bilangan asli n yang dinyatakan dalam basis sepuluh, $f(n)$ didefinisikan sebagai jumlah dari semua bilangan yang diperoleh melalui mencoret digit-digit yang mungkin dari n . Sebagai contoh untuk $n = 1234$, $f(n) = 1234 + 123 + 124 + 134 + 234 + 12 + 13 + 14 + 23 + 24 + 34 + 1 + 2 + 3 + 4 = 1979$. Sebab jika kita mencoret 0 digit kita memperoleh 1234, jika kita mencoret 1 digit kita memperoleh 123, 124, 134, 234, jika kita mencoret 2 digit kita memperoleh 12, 13, 14, 23, 24, 34, jika kita mencoret 3 digit kita memperoleh 1, 2, 3, 4 dan jika kita mencoret 4 digit kita memperoleh 0 yang tidak mempengaruhi jumlah $f(n)$. Jika n adalah bilangan yang terdiri dari 2011 digit, buktikan bahwa $f(n) - n$ habis dibagi 9.
2. Untuk setiap bilangan asli n , didefinisikan S_n sebagai banyaknya permutasi $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ dari $(1, 2, 3, \dots, n)$ sedemikian sehingga

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n}$$

merupakan bilangan asli. Buktikan bahwa $S_{2n} \geq n$ untuk setiap bilangan asli n

3. Diberikan sebarang segitiga lancip ABC . Misalkan l_a garis yang melalui A dan tegak lurus BC , l_b garis yang melalui B dan tegak lurus AC , l_c garis yang melalui C dan tegak lurus AB . Misalkan l_b dan l_c berpotongan di titik D , garis l_c dan l_a berpotongan di titik E dan terakhir garis l_a dan l_b berpotongan di titik F . Buktikan bahwa luas segitiga DEF paling sedikit tiga kali luas segitiga ABC
4. Di sebuah pulau terdapat sepuluh kota, dimana kota-kota tersebut dihubungkan dengan ruas-ruas jalan. Ada 2 kota yang terhubung, ada juga yang tidak. Suatu rute yang dimulai dari suatu kota mengunjungi tepat 8 dari 9 kota lainnya masing-masing sekali dan kembali ke kota awal dinamakan rute wisata. Tentukan banyak ruas jalan minimal yang perlu untuk dibuat sehingga apabila diberikan sebarang kota di pulau tersebut, ada rute wisata yang tidak melewati kota tersebut.

B. Hari Kedua

5. Perhatikan gambar di bawah ini

		6		
1	2	32	16	
		8		

Gambar di atas adalah gambar jaring-jaring dadu berbentuk kubus dengan panjang rusuk satu satuan. Misalkan n bilangan asli dan $2n$ dadu tersebut disusun membentuk balok berukuran $1 \times 2 \times n$ satuan dan diletakkan di lantai (ada enam cara peletakan). Misalkan S adalah jumlah bilangan yang terlihat pada balok tersebut (bagian bawah balok tidak terlihat). Tentukan n terkecil sedemikian sehingga terdapat penyusunan dadu-dadu membentuk balok dan peletakan dilantai yang memenuhi $S > 2011$.

6. Diberikan barisan bilangan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ yang memenuhi $a_0 = 1$ dan 2011 membagi $a_{k-1}a_k - k$ untuk $k = 1, 2, 3, \dots, 2010$. Buktikan bahwa 2011 juga membagi $a_{2010} + 1$
7. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan-bilangan real positif dengan sifat $abc = 1$. Jika diketahui bahwa

$$a^{2011} + b^{2011} + c^{2011} < \frac{1}{a^{2011}} + \frac{1}{b^{2011}} + \frac{1}{c^{2011}}$$

Buktikan bahwa $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

8. Diberikan segitiga sebarang ABC dan misalkan lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung sisi BC, CA , dan AB berturut-turut di titik D, E , dan F . Misalkan K dan L berturut-turut titi pada sisi CA dan AB sehingga $\angle EDK = \angle ADE$ dan $\angle FDL = \angle ADF$. Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga AKL menyinggung lingkaran dalam segitiga ABC