

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2010

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Misalkan a, b, c adalah bilangan asli yang berbeda. Buktikan bahwa barisan

$$a + b + c, ab + ac, 3abc$$

tidak mungkin membentuk barisan geometri maupun aritmatika.

2. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AC > BC$ dan titik pusat lingkaran luar O . Garis tinggi segitiga ABC dari C memotong AB dan lingkaran luar segitiga ABC lagi berturut-turut di titik D dan E . Garis melalui O sejajar AB memotong garis AC di titik F . Buktikan bahwa garis CO , garis melalui F tegak lurus AC , dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik.
3. Suatu kompetisi matematika diikuti oleh 120 peserta dari beberapa kontingen. Pada acara penutupan, setiap peserta memberikan 1 souvenir pada setiap peserta dari kontingen yang sama dan 1 souvenir pada salah seorang peserta dari tiap kontingen lainnya. Di akhir acara, diketahui terdapat 3840 souvenir yang dipertukarkan. Berapa banyak kontingen maksimal sehingga kondisi di atas dapat terpenuhi?
4. Diketahui bahwa m dan n adalah bilangan-bilangan asli dengan sifat

$$(mn) \mid (m^{2010} + n^{2010} + n)$$

Buktikan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $n = k^{2010}$

B. Hari Kedua

5. Sebanyak m orang laki-laki dan n orang perempuan ($m > n$) duduk mengelilingi meja bundar dan diawasi oleh seorang guru dan melakukan sebuah permainan sebagai berikut:
Mula - mula sang guru menunjuk seorang anak laki - laki untuk memulai permainan. Anak laki-laki tersebut meletakkan sekeping uang logam di atas meja. Kemudian bergiliran searah jarum jam, setiap anak melakukan gilirannya masing- masing. Jika anak tersebut laki-laki, ia menambahkan sekeping uang logam ke tumpukan di atas meja. Jika anak tersebut perempuan, ia mengambil sekeping uang logam dari tumpukan tersebut. Jika tumpukan uang di atas meja habis maka permainan berakhir saat itu juga. Perhatikan bahwa tergantung siapa yang ditunjuk oleh sang guru untuk memulai langkah pertama, maka permainan tersebut bisa cepat berakhir atau bisa saja berlangsung paling sedikit satu putaran penuh. Jika sang guru menginginkan agar permainan tersebut berlangsung paling sedikit satu putaran penuh, ada berapa pilihan anak laki- laki yang dapat beliau tunjuk untuk memulai permainan?

6. Cari semua bilangan asli $n > 1$ sedemikian sehingga

$$\tau(n) + \varphi(n) = n + 1$$

dengan $\tau(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang habis membagi n dan $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli kurang dari n yang relatif prima terhadap n

7. Misalkan a dan b dua bilangan real positif. Diberikan polinom $F(x) = x^2 + ax + b$ dan $G(x) = x^2 + bx + a$ sehingga semua akar dari polinom $F(G(x))$ dan $G(F(x))$ adalah bilangan real. Buktikan bahwa a dan b lebih besar dari 6
8. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi H . Misalkan K sebarang titik di dalam segitiga ABC yang tidak sama dengan O maupun H . Titik L dan M terletak di luar segitiga ABC sedemikian sehingga $AKCL$ dan $AKBM$ jajargenjang. Terakhir, misalkan BL dan CM berpotongan di titik N dan misalkan juga J adalah titik tengah HK . Buktikan bahwa $KONJ$ jajargenjang.