

## SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2009

Diketik ulang oleh: [muha.com](http://muha.com)

### A. Hari Pertama

1. Tentukan banyaknya bilangan  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2009\}$  sedemikian sehingga  $4n^6 + n^3 + 5$  habis dibagi 7
2. Misalkan untuk setiap bilangan real  $x$  didefinisikan  $\lfloor x \rfloor$  sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan  $x$ . Diberikan  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , suatu barisan bilangan asli yang memenuhi  $a_1 > 1$  dan

$$\left\lfloor \frac{a_1 + 1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_2 + 1}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_3 + 1}{a_4} \right\rfloor = \dots$$

Buktikan bahwa  $\left\lfloor \frac{a_n + 1}{a_{n+1}} \right\rfloor < 1$

3. Pada segitiga  $ABC$ , titik-titik  $D, E$ , dan  $F$  berturut-turut terletak pada segmen  $BC, CA$ , dan  $AB$ . Nyatakan  $P$  sebagai titik perpotongan  $AD$  dan  $EF$ . Tunjukkan bahwa

$$\frac{AB}{AF} \times DC + \frac{AC}{AE} \times DB = \frac{AD}{AP} \times BC$$

4. Di suatu pulau terdapat 7 kota dan ada jaringan kereta api yang melalui kota-kota tersebut. Setiap segmen rel menghubungkan tepat 2 kota, dan diketahui bahwa setiap kota memiliki paling sedikit 3 segmen ke kota lain. Buktikan bahwa terdapat rute perjalanan kereta api yang mengunjungi 4 kota yang berbeda masing-masing sekali dan kembali ke kota asalnya. (Contoh: rute  $A - B - C - D - A$ )

### B. Hari Kedua

5. Di dalam suatu laci terdapat paling banyak 2009 bola yang terdiri dari bola putih dan biru yang tercampur secara acak. Jika dua bola diambil secara acak tanpa pengembalian, maka diketahui probabilitas bahwa terambil keduanya bola warna putih atau keduanya bola warna biru adalah  $\frac{1}{2}$ . Berapa banyak maksimum bola putih yang mungkin berada dalam laci sedemikian sehingga pernyataan tentang probabilitas tersebut tetap terpenuhi?
6. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari fungsi

$$f(x) = x^{2008} - 2x^{2007} + 3x^{2006} - 4x^{2005} + 5x^{2004} - \dots - 2006x^3 + 2007x^2 - 2008x + 2009$$

untuk sebarang bilangan real  $x$

7. Suatu pasangan bilangan bulat  $(m, n)$  dikatakan baik jika  $m|(n^2+n)$  dan  $n|(m^2+m)$ . Diberikan sebarang dua bilangan asli  $a, b > 1$  yang relatif prima, buktikan bahwa terdapat pasangan baik  $(m, n)$  dengan  $a|m$  dan  $b|n$  tetapi  $a$  tidak membagi  $n$  dan  $b$  tidak membagi  $m$ .
8. Diberikan segitiga  $ABC$  lancip. Lingkaran dalam segitiga  $ABC$  menyinggung  $BC, CA$ , dan  $AB$  berturut-turut di  $D, E$ , dan  $F$ . Garis bagi sudut  $A$  memotong  $DE$  dan  $DF$  berturut-turut di  $K$  dan  $L$ . Misalkan  $AA_1$  adalah garis tinggi dan  $M$  titik tengah  $BC$
- Buktikan bahwa  $BK$  dan  $CL$  tegak lurus garis bagi  $BAC$
  - Tunjukkan bahwa  $A_1KML$  adalah segiempat talibusur.