

## SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2008

Diketik ulang oleh: [muha.com](http://muha.com)

### A. Hari Pertama

1. Diberikan segitiga  $ABC$ . Titik-titik  $D, E$ , dan  $F$  di luar segitiga  $ABC$  sedemikian sehingga segitiga  $ABD$ , segitiga  $BCE$ , dan segitiga  $CAF$  adalah segitiga sama sisi. Buktikan bahwa ketiga lingkaran luar segitiga tersebut berpotongan di satu titik.
2. Buktikan bahwa untuk  $x$  dan  $y$  bilangan real positif, berlaku

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{x})^2} + \frac{1}{(1 + \sqrt{y})^2} \geq \frac{2}{x + y + 2}$$

3. Carilah semua bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

untuk suatu  $a, b$ , dan  $c$  bilangan asli dengan  $FPB(a, b) = FPB(b, c) = FPB(c, a) = 1$

4. Misalkan  $A = \{1, 2, 3, \dots, 2008\}$ 
  - (a) Tentukan cacah subhimpunan dari  $A$  yang hasil kali semua anggotanya habis dibagi 7
  - (b) Misalkan  $N(i)$  menyatakan cacah subhimpunan dari  $A$  yang jumlah semua anggotanya bersisa  $i$  jika dibagi 7. Buktikan bahwa  $\sum_{i=0}^7 (-1)^i N(i) = 0$

### B. Hari Kedua

5. Misalkan  $m, n > 1$  bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga  $n$  membagi  $4^m - 1$  dan  $2^m$  membagi  $n - 1$ . Haruskan  $n = 2^m + 1$ ? jelaskan.
6. Ada 21 orang berhubungan secara rahasia dengan menggunakan frekuensi gelombang radio yang berbeda. Ada pasangan dua orang yang dapat berhubungan, mungkin ada yang tidak dapat. Setiap pasang yang berhubungan hanya menggunakan satu frekuensi tertentu yang berbeda dengan frekuensi yang digunakan pasangan lain. Setiap tiga orang selalu ada dua orang di antaranya yang tidak dapat berhubungan. Tentukan banyak maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan dan jelaskan.
7. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan panjang sisi-sisinya  $a, b$ , dan  $c$ . Garis-garis singgung lingkaran dalam segitiga  $ABC$  yang sejajar dengan sisi-sisi segitiga  $ABC$  membentuk tiga segitiga kecil. Pada masing-masing segitiga kecil dibuat lingkaran dalam.

Buktikan bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga  $ABC$  dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah

$$\frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{(a + b + c)^3}$$

8. Tentukan semua fungsi  $f : N \rightarrow N$  yang memenuhi

$$f(mn) + f(m + n) = f(m)f(n) + 1$$

untuk semua  $m, n \in N$