

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2007

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Misalkan ABC segitiga dengan $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$. Misalkan titik D pada sisi BC sehingga AD garis tinggi, titik E pada AB sehingga $\angle ACE = 10^\circ$, dan titik F adalah perpotongan AD dan CE . Buktikan bahwa $CF = BC$
2. Untuk setiap bilangan asli n , $b(n)$ menyatakan banyaknya faktor positif n dan $p(n)$ menyatakan hasil penjumlahan semua faktor positif n . Sebagai contoh, $b(14) = 4$ dan $p(14) = 24$. Misalkan k sebuah bilangan asli yang lebih besar dari 1.
 - (a) Buktikan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $b(n) = k^2 - k + 1$
 - (b) Buktikan bahwa ada berhingga banyak bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$
3. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif yang memenuhi ketaksamaan

$$5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab + bc + ca)$$

Buktikan bahwa ketiga ketaksamaan berikut berlaku: $a + b > c$, $b + c > a$, dan $c + a > b$

4. Suatu susunan 10-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dikatakan cantik jika (i) saat dibaca dari kiri ke kanan 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik, sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun, dan (ii) angka 0 tidak berada pada ujung kiri. Sebagai contoh, 9807123654 adalah susunan cantik. Tentukan banyaknya susunan cantik.

B. Hari Kedua

5. Misalkan r, s dua bilangan asli dan P sebuah papan catur dengan r baris dan s lajur. Misalkan M menyatakan banyak maksimal benteng yang dapat diletakkan pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang.
 - (a) Tentukan M
 - (b) Ada berapa cara meletakkan M buah benteng pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang.
6. Tentukan semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi ketiga persamaan berikut sekaligus:

$$x = y^3 + y - 8$$

$$y = z^3 + z - 8$$

$$z = x^3 + x - 8$$

7. Titik-titik A, B, C, D terletak pada lingkaran S demikian rupa, sehingga AB merupakan garis tengah S , tetapi CD bukan garis tengah S . Diketahui pula bahwa C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap AB . Garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P . Titik-titik Q dan R berturut-turut adalah perpotongan garis AC dengan garis BD dan garis AD dengan garis BC .
- Buktikan bahwa P, Q , dan R segaris
 - Buktikan bahwa garis QR tegak lurus terhadap garis AB
8. Misalkan m dan n dua bilangan asli. Jika ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k sehingga $k^2 + 2kn + m^2$ adalah bilangan kuadrat sempurna, buktikan bahwa $m + n$