

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2006

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi

$$x^3 - y^3 = 4(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = 2(x + y)$$

2. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan asli. Jika $30|(a + b + c)$, buktikan bahwa $30|(a^5 + b^5 + c^5)$.

Catatan: $x|y$ menyatakan x habis membagi y

3. Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat: $\tan A, \tan B$, dan $\tan C$ adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.
4. Misalkan $n > 2$ sebuah bilangan asli tetap. Sebuah bidak hitam ditempatkan pada petak pertama dan sebuah bidak putih ditempatkan pada petak terakhir sebuah papan catur berukuran $1 \times n$. Wiwit dan Siti lalu melangkah bergantian. Wiwit memulai permainan dengan bidak putih. Pada setiap langkah, pemain memindahkan bidaknya sendiri satu atau dua petak ke kanan atau ke kiri tanpa melompati bidak lawan. Pemain yang tidak bisa melangkah dinyatakan kalah. Pemain manakah yang memiliki cara (strategi) untuk selalu memenangkan permainan, apa pun yang dilakukan lawannya? Jelaskan strategi pemain tersebut?

B. Hari Kedua

5. Pada segitiga ABC , M adalah titik tengah BC dan G adalah titik berat segitiga ABC . Sebuah garis l melalui G memotong ruas garis AB di P dan ruas garis AC di Q , dimana $P \neq B$ dan $Q \neq C$. Jika $[XYZ]$ menyatakan luas segitiga XYZ , tunjukkan bahwa $\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$
6. Setiap nomor telepon di suatu daerah terdiri dari 8 angka dan diawali dengan angka 8. Pak Edy, yang baru pindah ke daerah itu, mengajukan pemasangan sebuah telepon baru. Berapakah peluang pak Edy mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 5 angka berbeda?
7. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real sehingga ab, bc, ca bilangan-bilangan rasional. Buktikan bahwa ada bilangan-bilangan bulat x, y, z yang tidak semuanya nol, sehingga $ax + by + cz = 0$
8. Tentukan bilangan bulat 85-angka terbesar yang memenuhi sifat: jumlah semua angkanya sama dengan hasil kali semuanya angkanya.