

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIONAL TAHUN 2005

Diketik ulang oleh: muha.com

A. Hari Pertama

1. Misalkan n bilangan bulat positif. Tentukan banyaknya segitiga (tidak saling kongruen) yang panjang setiap sisinya adalah bilangan bulat dan panjang sisi terpanjangnya adalah n .
2. Untuk sebarang bilangan asli n , didefinisikan $p(n)$ sebagai hasil kali digit-digit n (dalam representasi basis 10). Tentukan semua bilangan asli n sehingga $11 \times p(n) = n^2 - 2005$
3. Misalkan k dan m bilangan-bilangan asli sehingga $\frac{1}{2} (\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k})$ adalah bilangan bulat.
 - (a) Buktikan bahwa \sqrt{k} bilangan rasional
 - (b) Buktikan bahwa \sqrt{k} bilangan asli
4. Misalkan M suatu titik di dalam segitiga ABC sedemikian rupa hingga $\angle AMC = 90^\circ$, $\angle AMB = 150^\circ$, dan $\angle BMC = 120^\circ$. Titik pusat lingkaran luar segitiga-segitiga AMC , AMB , dan BMC berturut-turut adalah P , Q , dan R . Buktikan bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC

B. Hari Kedua

5. Untuk sebarang bilangan real x , notasikan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Buktikan bahwa ada tepat satu bilangan bulat m yang memenuhi persamaan.

$$m - \lfloor \frac{m}{2005} \rfloor = 2005$$

6. Tentukan semua tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan:

$$x(y + z) = y^2 + z^2 - 2$$

$$y(z + x) = z^2 + x^2 - 2$$

$$z(x + y) = x^2 + y^2 - 2$$

7. Misalkan $ABCD$ sebuah segiempat konveks. Persegi AB_1A_2B dibuat sehingga kedua titik A_2, B_1 terletak di luar segiempat $ABCD$. Dengan cara serupa diperoleh persegi-persegi BC_1B_2C , CD_1C_2D , dan DA_1D_2A . Misalkan K adalah titik potong AA_2 dengan BB_2 , L adalah titik potong BB_2 dengan CC_1 , M adalah titik potong CC_2 dengan DD_1 , dan N adalah titik potong DD_2 dengan AA_1 . Buktikan bahwa KM tegak lurus LN .

8. Sebuah kompetisi matematika diikuti oleh 90 peserta. Setiap peserta berkenalan dengan paling sedikit 60 orang peserta lainnya. Salah seorang peserta, Amin, menyatakan bahwa setidaknya terdapat empat orang peserta yang banyak teman barunya sama. Periksa kebenaran pernyataan Amin.

muhacode.com