

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT NASIOANAL TAHUN 2003

Diketik ulang oleh: muhacode.com

A. Hari Pertama

1. Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6, untuk setia bilangan bulat a
2. Diberikan sebuah segiempat $ABCD$ sebarang. Misalkan P, Q, R, S berturut-turut adalah titik-titik tengah AB, BC, CD, DA . Misalkan pula PR dan QS berpotongan di O . Buktikan bahwa $PO = OR$ dan $QO = OS$
3. Tentukan semua solusi bilangan real persamaan

$$\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$$

Catatan: untuk sebarang bilangan real y , notasi $\lfloor y \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan y , sedangkan notasi $\lceil y \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan y

4. Diberikan sebuah matriks berukuran 19×19 , yang setia komponennya bernilai $+1$ atau -1 . Misalkan pula b_i adalah hasil kali semua komponen matriks di baris ke- i dan k_j adalah hasil kali semua komponen matriks di kolom ke- j . Buktikan bahwa

$$b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} \neq 0$$

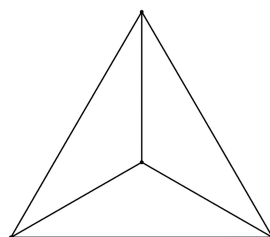
B. Hari Kedua

5. Untuk sebarang bilangan real a, b, c buktikan bahwa

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

6. Balairung sebuah istana berbentuk segi-6 beraturan dengan panjang sisi 6 meter. Lantai balairung tersebut ditutupi dengan ubin-ubin keramik berbentuk segitiga samasisi dengan panjang sisi 50 cm. Setiap ubin keramik dibagi ke dalam 3 daerah segitiga yang kongruen, lihat gambar.



Setiap daerah segitiga diberi satu warna tertentu sehingga setiap ubin memiliki tiga warna berbeda. Raja menginginkan agar tidak ada dua ubin yang memiliki pola warna sama. Paling sedikit berapa warna yang diperlukan?

7. Misalkan k, m, n adalah bilangan-bilangan asli demikian sehingga $k > n > 1$ dan faktor persekutuan terbesar k dan n sama dengan 1. Buktikan bahwa jika $k - n$ membagi $k^m - n^{m-1}$, maka $k \leq 2n - 1$
8. Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut jika hasil kali dari dua sisi yang bukan sisi miring sama dengan tiga kali keliling segitiga.